Fourier Transform[1]

Die Fourier-Transform ist eine Integraltransformation, die einer Funktion ihre Fourier-Transformierte zuordnet. Sie wird verwendet um ein Audio- oder Videosignal in einzelne Grundschwingungen zu zerlegen, und um Informationen über die Intensitätsverhältnisse mehrerer Spektren zu bekommen. (Nicht der Absolut-, sondern der relativer Wert ist eintscheidend)

Im Weiteren werden wir uns auf die Transformation mit der Cooley-Tukey Methode beschränken.

Allgemein DFT:

$$f_j = \sum_{k=0}^{2n-1} x_k \, e^{-\frac{2\pi i}{2n} jk} \qquad j = 0, \dots, 2n-1.$$

Wobei:

F	…	Frequenz an der j-ten Stelle
n	…	Abtastwerte (bei der FFT n=2^x, wobei x reell und ganzzahlig)
x	…	Analogwert (sample value)

Um so jeden Wert zu berechnen ist sehr zeit- und resourcenaufwendig, deshalb hat man die diskrete und später die schnelle Fourier-Transformation entwickelt.

John Baptiste Joseph FOURIER franz. Mathematiker, (1768-1830)

Diskrete Fourier-Transform

Es gibt keine Einschränkungen von der Messwertumfang her.
Sind *F*, *T* positive Zahlen mit $F \times T = 1/N$, und sind *M und L* beliebige ganzzahlige Verschiebungen, so lautet die Transformation mit $t_n = n \times T$ und $\omega_k = k(2 \times \pi \times F)$:

$$\hat{x}_k = T \sum_{n=-M}^{N-M-1} x_n e^{-\mathrm{i}\omega_k t_n} \quad \text{und} \quad x_n = F \sum_{k=-L}^{N-L-1} \hat{x}_k e^{-\mathrm{i}\omega_k t_n} .$$

[1] Schön deutsch gesagt: Fourier Transformation

Zeitdiskrete Fourier-Transform

Ist die Messwertfolge summierbar, d. h. die Summe aller Messwerte ist kleiner unendlich[2], so konvergiert die Fourier-Reihe in der Transformationsformel. Der Grenzwert der Reihe ist eine stetige Funktion. (_Nicht_ stätig ist z.B. ein Rechtecksignal)

Da die Funktionen $e_n(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(i\omega n)$ ein 2-er Potenz[3] bilden, erhält man aus der Zerlegungsformel wieder die Ausgangsfolge zurück.

Für positive *F*, *T* mit *F×T=1* kann wieder eine allgemeinere Transformationsformel angegeben werden.

Seien $t_n = n \times T$ Zeitpunkte mit Abstand *T*, dann gilt:

$$\hat{x}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega t_n}$$ und $$x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi F}^{\pi F} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t_n} d\,\omega$$.

Diese Formel und auf die aufbauende Berechnungen wurden im Mikrocontrollerbeispiel angewandt.

[2] Warum sollte es nicht sein?
[3] Auch Orthonormalsystem genannt

Fourier-Reihen für Funktionen auf einem Intervall

Jede stetige Funktion, welche über einem Intervall [0,T] definiert ist, lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln

Mit der Grundfrequenz *F=1/T* und den Kreisfrequenz $\omega_k = k(2\times\pi\times F)$ gilt:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T x(t) e^{-\mathrm{i}\,\omega_k t} d\,t$$ und $$x(t) = \sqrt{2\pi} F \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_k e^{\mathrm{i}\,\omega_k t}$$.

Aperiodische Vorgänge (Fourier-Integral)

Voraussetzung für die hergeleitete Fourier-Reihe ist dass das Messignal periodisch ist!

Selbstverständlich gibt es auch nichtperiodische Funktionen, die haben die Oberschwingungen die Frequenz n / T für die n-te Oberschwingung. Die Differenz der n-ten Oberfrequenz von der vorherigen ist $n / T - (n - 1) / T = 1 / T$, das heißt die Oberfrequenzen haben den Abstand $1/T$.

Für T gegen Unendlich rücken sie „infinitesimal" eng zusammen.
Eine Summe über so kleinen Stücke ist genau die Definition des Riemann-Integrals. Die Summe wird im Grenzfall zum Integral.

Das Fourier-Integral, die kontinuierliche Fourier-Transformation, ist also gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega$$

mit

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt.$$

Aus der Folge a_n ist nun das kontinuierliche Spektrum $a(\omega)$ geworden. Man bezeichnet genau genommen die zweite Transformation als Fourier-Transformation, die erste, deren inverse, ist die Fourier-Synthese[4].

[4] Nachbilden einer analogen spannung aus zeitdiskreten Werten. (z.B. MP3)