

1. Vektorok, lineáris algebra

1.1. Mátrixok

1.1.1. Fogalmak, tételek

Definíció

A **mátrix** elemek – általában számok – táblázata téglalap alakú elrendezésben.

Nyomtatott nagybetűvel jelölik – ezen felül nyomtatásban vastag betűvel. Szokás a táblázatot szögletes vagy kerek zárójelbe tenni.

$$\text{Példa: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 6 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Mátrixot úgy szorzunk egy λ számmal, hogy minden elemét megszorozzuk λ -val.

$$\text{Példa: Ha } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 6 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ akkor } 3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -24 \\ 18 & 18 & 3 \\ 12 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

- A mátrix **típusát** sorainak és oszlopainak száma határozza meg. Tehát pl. egy 4 sorból és 3 oszlopból álló mátrix 4×3 -as típusú.

Jelölés: $\mathbf{A}_{4 \times 3}$

- Összeadni és kivonni csak azonos típusú mátrixokat lehet. (Tehát ugyanannyi sorból és ugyanannyi oszlopból kell állniuk.) A megfelelő helyen levő elemeket kell összeadni, illetve kivonni.

Példa: Ha $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 13 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

- Két mátrix – adott sorrendben – akkor szorozható össze, ha az első oszlopainak száma megegyezik a második sorainak számával.

Pl. az $\mathbf{A}_{2 \times 3}$ mátrix (két sora és három oszlopa van), összeszorozható a $\mathbf{B}_{3 \times 4}$ mátrixszal ebben a sorrendben, fordított sorrendben azonban nem. (Tehát az $\mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető, de a $\mathbf{BA}$ nem.)

- Ha két mátrixot összeszorozunk, akkor az eredménymátrixnak annyi sora lesz, mint az első mátrixnak és annyi oszlopa, mint a másodiknak. ($\mathbf{A}_{n \times p} \mathbf{B}_{p \times q} = \mathbf{C}_{n \times q}$)

Pl. ha egy $\mathbf{A}_{2 \times 3}$ mátrixot és egy $\mathbf{B}_{3 \times 5}$ mátrixot összeszorozunk, akkor az eredmény az $(\mathbf{AB})_{2 \times 5}$ mátrix, amelynek 2 sora van (mint $\mathbf{A}$ -nak) és 5 oszlopa (mint $\mathbf{B}$ -nek).

Tétel:

Legyen az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok szorzata $\mathbf{C}$. A $\mathbf{C}$ mátrix i -edik sorának j -edik elemét úgy számítjuk ki, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának elemeit rendre megszorozzuk a $\mathbf{B}$ mátrix j -edik oszlopának megfelelő elemével és az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Példa: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -20 \\ 5 & -27 \end{bmatrix}$ $-20 = 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 6$

- A mátrixszorzás **nem kommutatív**, tehát ha a tényezőket felcseréljük, akkor az eredmény megváltozhat, sőt lehet, hogy a szorzás az egyik sorrendben elvégezhető, a másikban nem.

Példa: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, de $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

- Ha egy mátrixnak ugyanannyi sora van, mint ahány oszlopa, akkor **négyzetes (kvadratus)** mátrixnak nevezzük.

- A négyzetes mátrix **főátlóját** azok az elemek alkotják, amelyek ugyanannyiadik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban.

Tehát az első sor első eleme, a második sor második eleme stb.

Példa: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- A négyzetes mátrix másik (főátlótól különböző) átlóját **mel-lékátlónak** nevezzük.

Példa: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- A **diagonális mátrix (diagonálmátrix)** olyan négyzetes mátrix, amelynek minden főátlón kívüli eleme 0.

Megjegyzés: Az nem kizárt, hogy a főátlóban is legyen 0.

Példák: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Az olyan diagonális mátrixot, amelynek minden főátlóbeli eleme 1, **egységmátrixnak** nevezzük.

Példák: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.1.2. Feladatok

1. Adottak az **A**, **B**, **C** mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ és a $3\mathbf{C} - 2\mathbf{B} + \mathbf{A}$ mátrixokat!

2. Írjuk fel a $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$ mátrixot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Szorozzuk össze az **A** és a **B** mátrixokat.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 9 & -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1.1.3. Megoldások

$$1. \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 17 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad 3\mathbf{C} - 2\mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -6 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$2. 2\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 8 \\ -2 & -8 & 2 \\ 7 & 18 & -1 \\ -5 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ a) } \begin{bmatrix} 4 & 7 & -15 \\ -2 & 55 & -51 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -15 & 32 & -7 & -3 \\ 53 & -19 & 31 & 31 \end{bmatrix} \quad \text{c) Nem végezhető el}$$
$$\text{d) } \begin{bmatrix} 11 & 8 & 4 & -1 \\ -6 & 4 & 6 & 5 \\ -5 & 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$$

1.2. Determinánsok

1.2.1. Fogalmak, tételek

- Egy 2×2 -es mátrix **determinánsának** értéke a főátlóbeli és a mellékátlóbeli elemek szorzatának különbsége.

Jelölés: Az $\mathbf{A}$ (négyzetes) mátrix determinánsát $\det \mathbf{A}$ -val jelöljük.

Ha a mátrix elemeivel akarjuk felírni a mátrix determinánsát, akkor a mátrix elemeit két függőleges vonal közé tesszük.

Példa: Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, akkor $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$

- Az $n \times n$ -es determinánst, n -edrendű determinánsnak is nevezzük.

Tehát a 2×2 -es determináns másodrendű, a 3×3 -as harmadrendű, stb.

- Sakktáblaszabály: A determináns elemeihez $+$, illetve $-$ előjeleket rendelünk, amelyek úgy váltakoznak, mint a világos és sötét mezők a sakktáblán. Az első sor első eleméhez $+$ előjel tartozik.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- Az n -edrendű determináns egy adott eleméhez tartozó **(előjeles) aldeterminánsát** úgy kapjuk, hogy elhagyjuk a szóbanforgó elem sorát és oszlopát, és a megmaradó elemek által alkotott determinánst változatlanul hagyjuk, vagy megszorozzuk -1 -gyel aszerint, hogy az adott elemhez a sakktábla-szabály szerint $+$, vagy $-$ tartozik.

Példa: Az $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ determináns első sorának második eleméhez tartozó (előjeles) aldetemináns: $(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Ugyanezen a determináns a második sorának második eleméhez tartozó (előjeles) aldetemináns: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

- A magasabbrendű determinánsok kiszámítását, visszavezethetjük alacsonyabbrendűek kiszámítására a **kifejtési tétel** segítségével: Kiválasztjuk a determináns egy tetszőleges sorát, vagy oszlopát és ennek elemeit rendre megszorozzuk a hozzájuk tartozó (előjeles) aldeteminánssal, végül az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Példa: Fejtsük ki a $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ determinánst az első sora szerint!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(0 - (-4)) - (3 - 8) - (-6 - 0) = 19$$

Fejtsük ki ugyanezt a determinánst a második sora szerint is!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -3(1 - 2) - 2(-4 - 4) = 19$$

Természetesen – mint a példában is – mindegy, hogy a determinánst melyik sora vagy oszlopa szerint fejtjük ki, ez a determináns értékét nem befolyásolja. Az elvégzendő számolás mennyisége azonban jelentősen különböző lehet választásunktól függően. A fenti példában pl. kevesebbet kellett számolnunk a második esetben, mert a második sorban az egyik elem 0, ezért a hozzá tartozó aldeteminánst nem kellett kiszámolni.

A kifejtési tétel mindig alkalmazható a magasabbrendű determinánsok kiszámítására, de minél magasabbrendű determinánsról van szó, annál számolásigényesebb.

- Harmadrendű determinánsok kiszámítására alkalmazható a **Sarrus-szabály** is: A determináns első és második oszlopát még egyszer leírjuk a determináns mögé, így összesen öt oszlopot kapunk. A determináns értéke a főátló irányában összeköthető elemhármask szorzatösszegének és a mellékátló irányában összeköthető elemhármask szorzatösszegének a különbsége.

Példa: Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értékét Sarrus-szabállyal!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 1 = 19$$

- A determináns értéke nem változik, ha egy sorát (vagy annak számszorosát) hozzáadjuk egy másik sorához.
(A tétel oszlopokra is érvényes.)

$$\text{Példa: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 19$$

Itt a determináns kiszámítása során először hozzáadtuk az első sor kétszeresét a harmadik sorhoz. Ezután a determinánst a második oszlopa szerint fejtettük ki, mert abban csak egy 0-tól különböző elem maradt, tehát csak egy al-determinánst kellett kiszámítanunk.

1.2.2. Feladatok

1. Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

1.2.3. Megoldások

$$1. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 28$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 0$$

e) Első megoldás:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-7) = 24$$

Második megoldás: Először a második sort hozzáadjuk a harmadikhoz, majd a determinánst kifejtjük a középső oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (-14) = 24$$

1.3. Lineáris egyenletrendszerek

1.3.1. Fogalmak, tételek

- Egy (algebrai) egyenletrendszert **lineárisnak** nevezünk, ha csak elsőfokú és konstans tagok szerepelnek benne.

Példák:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 7z = 12 \\ x + 11y - 2z = 9 \\ -x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \text{ egy lineáris egyenletrendszer.}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 + 33x_3 - 4x_4 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 7 \end{cases} \text{ szintén egy lineáris egyenletrendszer.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y^2 - 7z = 12 \\ x + 11y - 2z = 9 \\ -x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \text{ nem lineáris egyenletrendszer, mert van benne egy másodfokú tag } (3y^2).$$

$$\begin{cases} 4x + 2y - 7z = 12 \\ xy + 11y - 2z = 9 \\ -x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \text{ szintén nem lineáris egyenletrendszer, mert van benne egy másodfokú tag } (xy).$$

$$\begin{cases} 4 \ln x + 2y = 12 \\ x + 11y = 9 \end{cases} \text{ nem is algebrai egyenletrendszer (az } \ln x \text{ tag miatt).}$$

- Ha egy lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, akkor az egyenletrendszer **fődeterminánsa** az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determináns.

Példák:

$$\text{Az } \begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ x + 11y - 2z = 9 \\ -x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \text{ egyenletrendszer fődeterminánsa } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Mint a példában is látszik, ha valamelyik egyenletben az egyik ismeretlen nem szerepel, akkor a determináns megfelelő eleme 0, ha pedig nem írjuk ki az ismeretlen együtthatóját, az azt jelenti, hogy az együttható 1.

$$\text{Az } \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 + 33x_3 - 4x_4 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 7 \end{cases} \begin{array}{l} \text{egyenletrendszer esetén nem beszélhetünk} \\ \text{fődeterminánsról, mert az ismeretlenek száma} \\ \text{nem egyezik meg az egyenletek számával.} \end{array}$$

- Ha egy lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, akkor az egyenletrendszer minden ismeretlenéhez tartozik egy **módosított determináns**, amit úgy kapunk, hogy a fődeterminánsban a megfelelő ismeretlen együtthatóit kicseréljük az egyenlőségjelek jobboldalán álló konstans tagokra.

Példák:

$$\text{Az } \begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ x + 11y - 2z = 9 \\ -x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \text{ egyenletrendszer módosított determinánsai:}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 9 & 11 & -2 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 9 & -2 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 1 & 11 & 9 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{Az } \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 + 33x_3 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 7 \end{cases} \text{ egyenletrendszer módosított determinánsai:}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -7 \\ 19 & 8 & 33 \\ 7 & -2 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -7 \\ -2 & 19 & 33 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 12 \\ -2 & 8 & 19 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

- **Cramer-szabály:** Ha a lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, és az egyenletrendszer fődeterminánsa nem 0, akkor az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van és az egyes ismeretleneket úgy számíthatjuk ki, hogy a megfelelő módosított determinánst elosztjuk a fődeterminánssal.

$$\text{Példa: Az } \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 + 33x_3 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 7 \end{cases} \text{ egyenletrendszer megoldása:}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2455}{1395} \approx 1,76 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1324}{1395} \approx 0,95 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{631}{1395} \approx 0,45$$

- Ha a lineáris egyenletrendszer fődeterminánsa 0, akkor az két dolgot jelenthet: az egyenletrendszer ellentmondó (azaz nincs megoldása) vagy összefüggő (végtelen sok megoldása van).

- Az **egyenletrendszer mátrixán** az ismeretlenek együtthatóiból alkotott mátrixot értjük.

Példa:

$$\text{Az } \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 + 33x_3 = 19 \\ x_1 + 8x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \text{ egyenletrendszer mátrixa: } \begin{bmatrix} 7 & 3 & -7 & 3 \\ -2 & 8 & 33 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ha az egyenletrendszer mátrixát kiegészítjük még egy oszloppal, amelynek elemei az egyenletrendszer jobboldalán álló konstansok, akkor az egyenletrendszer **kibővített mátrixát** kapjuk.

Példa:

$$\text{Az } \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 + 33x_3 = 19 \\ x_1 + 8x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \text{ egyenletrendszer kibővített mátrixa: } \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 3 & -7 & 3 & 12 \\ -2 & 8 & 33 & 0 & 19 \\ 1 & 0 & 8 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

Megjegyzés: Az egyenletrendszer kibővített mátrixa tulajdonképpen az egyenletrendszer rövidített írásmódja, hiszen nem kell kiírni az ismeretleneket és az egyenlőségjeleket, mégis minden együtthatóról tudjuk, hogy melyik ismeretlenhez tartozik a helye alapján.

- A **Gauss-módszer** a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere akárcsak a Cramer-szabály. Előnye, hogy minden esetben alkalmazható. A megoldás során az egyenletrendszer kibővített mátrixából indulunk ki és ezt a mátrixot ún. **elemi sorműveletek** segítségével módosítjuk. Minden módosított mátrix egy az eredetivel ekvivalens egyenletrendszernek felel meg.

- Az **elemi sorműveletek**:
 - A mátrix két sorát megcserélhetjük.
 - A mátrix bármelyik sorát megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk egy 0-tól különböző számmal.
 - A mátrix egy sorát – vagy annak valahányszorosát – hozzáadhatjuk egy másik sorához, illetve levonhatjuk belőle.

Megjegyzés: Az elemi sorműveletek az egyenletrendszerek megoldásának – középiskolából jól ismert – lépései. A mátrix két sorának cseréje megfelel két egyenlet felcserélésének, ami nyilván ugyanazt az egyenletrendszert eredményezi. Ha a mátrix egy sorát megszorozzuk egy 0-tól különböző számmal, az a megfelelő egyenlet ugyanezen számmal való szorzásának felel meg stb.

- A **Gauss-módszer** alkalmazása során arra törekszünk, hogy kialakítsuk az ún. lépcsős alakot, ami azt jelenti, hogy a mátrix bal alsó sarkában egy 0-kból álló háromszög – esetleg trapéz – alakú rész alakítunk ki. Ez megkönnyíti a megoldás felírását.

Példák: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow_{+}^{-2} \\ \leftarrow_{+}^{-3} \end{array} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & -17 \\ 0 & 3 & -8 & -27 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow_{+}^{-1} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 2 & -5 & -17 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow_{+}^{-2} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Adjuk hozzá az első sor -2 -szeresét a második, -3 -szorosát a harmadik sorhoz! Így elemi sorműveletek segítségével elérjük, hogy az első oszlopban a legfelső elem kivételével minden elem 0 legyen. Most vonjuk le a második sort a harmadik sorból és cseréljük meg a második és a harmadik sort! Végül vonjuk le a második sor kétszeresét a harmadik sorból! Ezáltal a második oszlop legalsó eleme is 0 lesz, eljutottunk a lépcsős alakhoz – kialakult a 0-kból álló háromszög a bal alsó sarokban.

Az így kialakult – eredetivel ekvivalens – egyenletrendszer utolsó egyenlete $z = 3$, ami megadja a harmadik ismeretlen értékét. A második egyenlet $y - 3z = -10$, amit átrendezve megkapjuk y értékét is: $y = 3z - 10 = 3 \cdot 3 - 10 = -1$. Végül az első egyenletből megkapjuk x értékét: $x + y + z = 9 \Rightarrow x = 9 - y - z = 9 - (-1) - 3 = 7$.

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $x = 7$, $y = -1$, $z = 3$ számhármass.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x & -2z = 6 \\ & +y + z = 1 \\ 2x + y & -z = 7 \\ & 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow_{+}^{-3} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Adjuk hozzá a második sor -3 -szorosát a negyedik sorhoz! Az utolsó sorban minden ismertelen együtthatója 0 lesz, míg a jobboldalon álló konstans tag értéke -3 . Ez a $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3$ egyenletnek felel meg, amelynek nincs megoldása, hiszen az egyenlet baloldala az x, y, z változók bármely értéke esetén 0, ami nem egyezik meg a jobboldallal. Ha az egyenletrendszer megoldása során ilyen ellentmondó egyenlet adódik, akkor az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x & -y + z = 1 \\ 3x & + z = 3 \\ 5x - 2y & + 3z = 5 \end{cases}$$

Hajtsuk végre az elemi sorműveleteket a szokott módon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow_{+}^{-3} \\ \leftarrow_{+}^{-5} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow_{+}^{-1} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az utolsó egyenlet $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ az x, y, z ismeretlenek bármely értéke esetén teljesül, ezért az ismeretlenekre nézve semmilyen információt nem hordoz – semmitmondó. Ezért ezt a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk. Így viszont csak két egyenletünk maradt – kevesebb,

mint az ismeretlenek száma. Ha az egyik ismeretlent, pl. z -t paraméternek választjuk, akkor vele a másik két ismeretlen kifejezhető. A második egyenletből $y = \frac{2}{3}z$ és $x = 1 + y - z = 1 + \frac{2}{3}z - z = 1 - \frac{1}{3}z$, ahol z tetszőleges valós szám.

Tehát a megoldás: $x = 1 - \frac{1}{3}z$, $y = \frac{2}{3}z$, $z \in \mathbb{R}$

Ez végtelen sok megoldás, hiszen z -t végtelen sokféleképpen választhatjuk. Írjuk fel a végtelen sok megoldás közül kettőt!

Pl. ha $z = 0$, akkor $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$,

ha $z = 3$, akkor $x = 0$, $y = 2$, $z = 3$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek a megoldások kielégítik az eredeti egyenletrendszert.

1.3.2. Feladatok

1. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + 6z = 14 \\ x + 4y - z = 6 \\ 4x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 2y - 6z = 2 \\ 2x + 4y + 10z = 8 \\ 9x + 10y + 14z = 18 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 7x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 5z = 0 \\ 17x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

1.3.3. Megoldások

1. a) A

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 14 \\ x + 4y - z = 6 \\ 4x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása Cramer-szabállyal.

Az egyenletrendszer fődeterminánsa

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -70.$$

Az y -hoz tartozó módosított determináns

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 6 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -140,$$

így $y = \frac{D_y}{D} = 2$. Hasonlóan számolható x értéke: $x = 1$. Az utolsó ismeretlent érdemesebb úgy meghatározni, hogy az egyenletek valamelyikébe behelyettesítjük a már meghatározott ismeretleneket és a kapott egyismeretlenes egyenletből meghatározzuk z értékét ($z = 3$).

A megoldás $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

1. a) A

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 14 \\ x + 4y - z = 6 \\ 4x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 6 & 14 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 8 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \leftarrow \\ \xrightarrow{+} \leftarrow \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 6 & 14 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \leftarrow \\ \xrightarrow{+} \leftarrow \end{array} \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & -11 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \leftarrow \\ \xrightarrow{+} \leftarrow \end{array} \cdot (-1) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 38 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{-5} \leftarrow \\ \xrightarrow{+} \leftarrow \end{array} \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 38 \\ 0 & 0 & -70 & -210 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \leftarrow \\ \xrightarrow{+} \leftarrow \end{array} \cdot \left(-\frac{1}{70}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A redukált egyenletrendszer leolvasható az utolsó mátrixból:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ y - 2z = -4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ha a $z = 3$ -at visszahelyettesítjük a második egyenletbe $y = 2$ -t kapunk, majd z -t és y -t visszahelyettesítve az első egyenletbe $x = 1$ adódik.

A megoldás $x = 1, y = 2, z = 3$.

2. A

$$\begin{cases} 5x + 2y - 6z = 2 \\ 2x + 4y + 10z = 8 \\ 9x + 10y + 14z = 18 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása Gauss-módszerrel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 8 \\ 9 & 10 & 14 & 18 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow^{-1}_+ \\ \leftarrow^{-2}_+ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow^+ \\ \leftarrow^{-2}_{-2} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -26 & -14 \\ 2 & 4 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow^{-2}_+ \\ | \cdot \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -26 & -14 \\ 0 & 8 & 31 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az utolsó előtti mátrix harmadik sora a $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ egyenletnek felel meg, ami nem hordoz információt, mert minden (x, y, z) hármas kielégíti. Ezt az egyenletet tehát elhagyhatjuk, így a redukált egyenletrendszer két egyenletből áll. Mivel eggyel több ismeretlenünk van, mint egyenletünk ezért egy ismeretlent paraméternek választunk.

Legyen ez pl. z . A megoldás: $x = -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}z$, $y = \frac{9}{4} - \frac{31}{8}z$, $z \in \mathbb{R}$.

3. A

$$\begin{cases} 7x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 5z = 0 \\ 17x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása Gauss-módszerrel:

A redukált egyenletrendszer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 12 & 2 \\ 0 & 24 & -29 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

az utolsó egyenlet tehát $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$, ami nem teljesülhet semmilyen (x, y, z) hármas esetén.

Az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

1.4. Vektorok

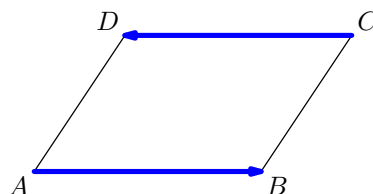
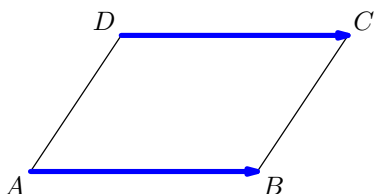
1.4.1. Fogalmak, tételek

- A tér irányított szakaszait **vektoroknak** nevezzük. Egy vektort akkor tekintünk adotttna, ha ismerjük a nagyságát és az irányát.

Jelölés: Felírhatjuk a vektort a kezdő és végpontja segítségével: $\overrightarrow{PQ}$ vagy jelölhetjük egy kisbetűvel is. Az utóbbi esetben a vektort jelölő betűt írásban aláhúzzuk, nyomtatásban vastagon szedjük: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$.

- Két vektor **egyenlő**, ha nagyságuk (hosszuk) is és irányuk is megegyezik.

Példa: Az $ABCD$ paralelogramma $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ oldalvektorai megegyeznek, mert nagyságuk és irányuk is egyenlő. Írhatjuk tehát, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok azonban nem egyeznek meg, mert irányuk nem egyezik meg (hanem ellentétes). Tehát $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$



- A vektor hosszát a **vektor abszolút értékének** is nevezzük.

Jelölés: $|\overrightarrow{PQ}|$, $\underline{p}$, $|\mathbf{r}|$

A vektor abszolút értéke csak nemnegatív (valós) szám lehet.

- Azt a vektort, amelynek abszolút értéke 0, **nullvektornak** nevezzük. Ennek iránya tetszőleges, ezért pl. minden más vektorral párhuzamos, de minden más vektorra merőleges is.

Jelölés: $\underline{0}$, illetve $\mathbf{0}$. (Különbözik a 0 számtól!).

- Ha egy vektor abszolút értéke 1, akkor egységvektornak nevezzük.

Megjegyzés: Míg $\mathbf{0}$ vektor csak egy van, addig egységvektor végtelen sok.

- Két vektor **összegén** egy harmadik vektort értünk, amelyet meghatározhatunk paralelogramma-módszer, vagy összefűzés (háromszög-módszer, sokszög-módszer) segítségével.



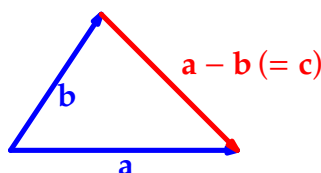
Megjegyzés: Párhuzamos vektorok összegzése esetén csak az összefűzés módszerét alkalmazhatjuk.

- A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív (a számok összeadásához hasonlóan), azaz

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ esetén } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ esetén } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

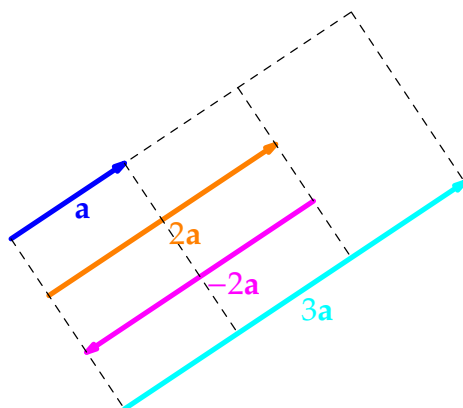
- Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **különbségén** azt a $\mathbf{c}$ vektort értjük, amelyre $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.



Megjegyzések:

- Két vektor különbségét megkaphatjuk úgy, hogy közös kezdőpontba toljuk őket, mert ekkor a különbségvektor a végpontjaikat összekötő vektor lesz, a kisebbítendő felé irányítva.
- A vektorok összeadása, illetve kivonása során az eredmény esetleg a $\mathbf{0}$ is lehet.

- Bármely $\mathbf{a}$ vektor esetén $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{0} = \mathbf{a}$.
- Egy $\mathbf{a}$ vektor és egy λ szám szorzata egy vektor, amelynek hossza $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, párhuzamos $\mathbf{a}$ -val és $\lambda > 0$ esetén egyirányú, $\lambda < 0$ esetén ellentétes irányú $\mathbf{a}$ -val.



- A Vektorok számmal való szorzására érvényesek a következő műveleti szabályok:

$$\forall \lambda, \mu \forall \mathbf{a} \text{ esetén } \lambda (\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a} \quad (\text{kvázi asszociatív})$$

$$\forall \lambda \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ esetén } \lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \quad (\text{disztributív})$$

$$\forall \lambda, \mu \forall \mathbf{a} \text{ esetén } (\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} \quad (\text{kvázi disztributív})$$

Példák:

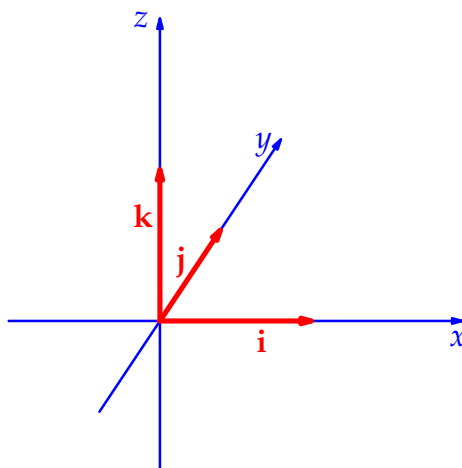
$$2 \cdot (3\mathbf{a}) = 6\mathbf{a}$$

$$5 \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 5\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$$

$$(2 + 7) \mathbf{w} = 9\mathbf{w}$$

A térben való eligazodáshoz leggyakrabban ún. Descartes-féle koordinátarendszert használunk. Ennek kezdőpontja a koordinátatengelyek közös pontja (origo), a tengelyek páronként merőlegesek egymásra. A továbbiakban tegyük fel, hogy az x , y és z tengely ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. (z pozitív oldala felől ránézve az xy síkra az x -tengelyt pozitív, azaz óramutató járásával ellentétes 180° -nál kisebb forgás viszi az y tengelybe.)

Mindhárom tengelyen felvesszünk egy a tengely pozitív irányába mutató egységvektort ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$), melyeket bázisvektornak nevezünk.



- A tér bármely $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen feírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban, ahol x , y , z valós számok.

Megjegyzés: Az egyértelmű felírhatóság két dolgot jelent:

- Minden $\mathbf{v}$ vektorhoz található olyan x , y , z számhármass, amelyre $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- Minden $\mathbf{v}$ vektorhoz pontosan egy ilyen hármass található, tehát $\mathbf{v}$ nem írható fel többféleképpen az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

- A $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ lineáris kombinációjában szereplő x , y , z számokat a $\mathbf{v}$ vektor **koordinátáinak** nevezzük.

Példa: Ha $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, akkor $\mathbf{v}(2, -3, 1)$, azaz $\mathbf{v}$ első koordinátája 2, második koordinátája -3 , harmadik koordinátája 1.

Megjegyzés: Az első koordinátára használatos az *abszcissza* a másodikra az *ordináta*, a harmadikra a *kóta* elnevezés is.

- Két vektor összegének koordinátái az eredeti vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlők.

Példa: Ha $\mathbf{a}(2, 7, -3)$, $\mathbf{b}(4, -1, 5)$, és $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{c}(6, 6, 2)$.

- Két vektor különbségének koordinátái az eredeti vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlők.

Példa: Ha $\mathbf{a}(4, 1, -3)$, $\mathbf{b}(5, -1, 6)$, és $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{c}(-1, 2, -9)$.

- Ha egy vektort egy λ számmal szorzunk, akkor az így kapott vektor minden koordinátája a eredeti vektor megfelelő koordinátájának λ -szorosa lesz.

Példa: Ha $\mathbf{a}(3, 1, -5)$ és $\mathbf{b} = 4\mathbf{a}$, akkor $\mathbf{b}(12, 4, -20)$.

- Tekintsük az $\overrightarrow{AB}$ vektort, melynek kezdőpontja $A(a_1, a_2, a_3)$, végpontja $B(b_1, b_2, b_3)$. Ekkor az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái a B és A pont megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlők, azaz $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Példa: Ha $A(2, 1, -2)$ és $B(4, -5, 1)$, akkor $\overrightarrow{AB}(2, -6, 3)$.

Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy a végpont koordinátáiból kell a kezdőpont koordinátáit levonni!

1.4.2. Feladatok**Abszolút érték, lineáris kombináció**

1. Számítsa ki a következő vektorok abszolútértékét:

- a) $\mathbf{a}(2, 1, 2)$
- b) $\mathbf{b}(4, 1, 8)$
- c) $\mathbf{c}(6, 1, 18)$
- d) $\mathbf{d}(2, 3, 6)$

2. Adottak az $\mathbf{a}(2, 9, -7)$ és a $\mathbf{b}(-3, 0, 6)$ vektorok. Számítsa ki a következő vektorok koordinátáit:

- a) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
- b) $-\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$
- c) $-2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$
- d) $7\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b}$

3. Párhuzamosak-e az alábbi vektorpárok?

- a) $\mathbf{a}(2, 9, -7)$, $\mathbf{b}(12, -8, 6)$
- b) $\mathbf{c}(3, -4, 2)$, $\mathbf{d}(9, -12, 6)$
- c) $\mathbf{u}(-1, 5, 3)$, $\mathbf{v}(\frac{3}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{9}{4})$

4. Írja fel a megadott vektor irányába mutató egységvektort:

- a) $\mathbf{a}(4, 3, 12)$
- b) $\mathbf{b}(-4, 6, 12)$
- c) $\mathbf{c}(8, -2, 16)$

5. Írja fel az A és a B pontokat összekötő $\overrightarrow{AB}$ vektort és számítsa ki a hosszát:

- a) $A(11, -4, 7)$, $B(17, -2, 10)$
- b) $A(1, 6, -9)$, $B(-3, 8, -5)$
- c) $A(-1, 5, -4)$, $B(2, -11, 9)$

Skaláris és vektoriális szorzat

1. Adott az ABC háromszög. Számítsa ki a háromszög oldalait, területét és szögeit.
 - a) $A(3, 0, 4)$, $B(5, -9, 7)$, $C(-1, 4, 3)$
 - b) $A(-3, 1, 4)$, $B(2, 7, -3)$, $C(-2, 0, 0)$
 - c) $A(5, 2, 2)$, $B(2, 7, -3)$, $C(-2, 0, 0)$
2. Számítsa ki a következő vektorok skaláris és vektoriális szorzatát:
 - a) $\mathbf{a}(4, 1, -1)$, $\mathbf{b}(7, 4, 3)$
 - b) $\mathbf{a}(-3, 2, 1)$, $\mathbf{b}(-5, -2, 4)$
 - c) $\mathbf{a}(4, 5, 1)$, $\mathbf{b}(5, -2, -10)$
3. Válassza meg a hiányzó koordinátát úgy, hogy a két vektor merőleges, illetve párhuzamos legyen egymással:
 - a) $\mathbf{a}(4, -3, 6)$ $\mathbf{b}(x, 1, 3)$
 - b) $\mathbf{a}(-8, 12, x)$, $\mathbf{b}(4, -6, 5)$
 - c) $\mathbf{a}(x, -2, 8)$, $\mathbf{b}(-6, y, 9)$
4. Számítsa ki az ABC háromszög területét:
 - a) $A(6, -3, 4)$, $B(-2, 0, 4)$, $C(3, 6, 4)$
 - b) $A(1, 1, 1)$, $B(2, -3, 5)$, $C(4, 0, 3)$
 - c) $A(2, -1, 1)$, $B(3, 0, 7)$, $C(11, 2, -3)$

1.4.3. Megoldások

Abszolút érték, lineáris kombináció

1. a) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$
 b) $|\mathbf{b}| = 9$
 c) $|\mathbf{c}| = 19$
 d) $|\mathbf{d}| = 7$
2. a) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 27\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$
 b) $-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = -11\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 25\mathbf{k}$
 c) $-2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} = \mathbf{i} - 18\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$
 d) $7\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b} = \frac{19}{2}\mathbf{i} + 63\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$
3. a) $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, mert nincs olyan alkalmas szám szorzó, amellyel $\mathbf{a}$ -t megszorozva $\mathbf{b}$ -t kapjuk.
 (Pl. $\frac{12}{2} \neq -\frac{8}{9}$).
 b) $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$, mert $\mathbf{d} = 3\mathbf{c}$.
 c) $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, mert $\mathbf{v} = -\frac{3}{4}\mathbf{u}$.
4. a) $\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{13} \Rightarrow \mathbf{e}_a \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13} \right)$
 b) $\mathbf{e}_b \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right)$
 c) $\mathbf{e}_c \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{8}{9} \right)$
5. a) $\overrightarrow{AB}(6, 2, 3), \quad |\overrightarrow{AB}| = 7$
 b) $\overrightarrow{AB}(-4, 2, -14), \quad |\overrightarrow{AB}| = 6\sqrt{6} \approx 14,7$
 c) $\overrightarrow{AB}(3, -16, 13), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{434} \approx 20,8$

Skaláris és vektoriális szorzat

1. a) $\vec{AB}(2, -9, 3)$, $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{94}$, $BC = \sqrt{221}$, $AC = \sqrt{33}$,
 $k = \sqrt{94} + \sqrt{221} + \sqrt{33} \approx 30,3$
 $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = -\frac{47}{\sqrt{94} \cdot \sqrt{33}} \approx -0,8439 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha \approx 147,55^\circ$, $\beta \approx 11,97^\circ$, $\gamma \approx 20,48^\circ$
- b) $AB = \sqrt{110}$, $BC = \sqrt{74}$, $CA = \sqrt{18}$, $k = \sqrt{110} + \sqrt{74} + \sqrt{18} \approx 23,33$
 $\alpha \approx 52,64^\circ$, $\beta \approx 23,08^\circ$, $\gamma \approx 104,28^\circ$
- c) $AB = \sqrt{38}$, $BC = \sqrt{74}$, $CA = \sqrt{78}$, $k = \sqrt{38} + \sqrt{74} + \sqrt{78} \approx 23,6$
 $\alpha \approx 67,31^\circ$, $\beta \approx 71,9^\circ$, $\gamma \approx 41,39^\circ$
2. a) $\mathbf{ab} = 4 \cdot 7 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 29$
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 7\mathbf{i} - 19\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}(7, -19, 9)$
- b) $\mathbf{ab} = 15$ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}(10, 7, 16)$
- c) $\mathbf{ab} = 0$ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}(-48, 45, -33)$
3. a) $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz:
 $4x - 3 + 18 = 0$, tehát $x = -\frac{15}{4}$.
A két vektor nem lehet párhuzamos, mert $\frac{-3}{1} \neq \frac{6}{3}$, azaz nincs olyan szám, amellyel $\mathbf{b}$ -t megszorozva $\mathbf{a}$ -t kapnánk.
- b) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ akkor és csak akkor, ha $x = 20\frac{4}{5}$.
A két vektor párhuzamos, ha $x = -10$.
- c) A két vektor merőleges, ha az $y = 36 - 3x$ összefüggés teljesül. (Tehát végtelen sok esetben, mert pl. x értékét tetszés szerint választva, ahhoz kiszámítható a megfelelő y .)
 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, ha $x = -\frac{48}{9}$ és $y = -\frac{9}{4}$
4. a) $\vec{AB}(-8, 3, 0)$, $\vec{AC}(-3, 9, 0)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = -63\mathbf{k}$, $T = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = 31,5$
- b) $\vec{AB}(1, -4, 4)$, $\vec{AC}(3, -1, 2)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = -4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$, $T = \frac{\sqrt{237}}{2} \approx 7,7$
- c) $\vec{AB}(1, 1, 6)$, $\vec{AC}(9, 3, -4)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = -22\mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $T = \frac{\sqrt{3884}}{2} \approx 31,16$

1.5. Egyenes és sík

1.5.1. Fogalmak, tételek

- Az e egyenessel párhuzamos $\mathbf{0}$ -tól különböző vektort e **irányvektorának** nevezzük.

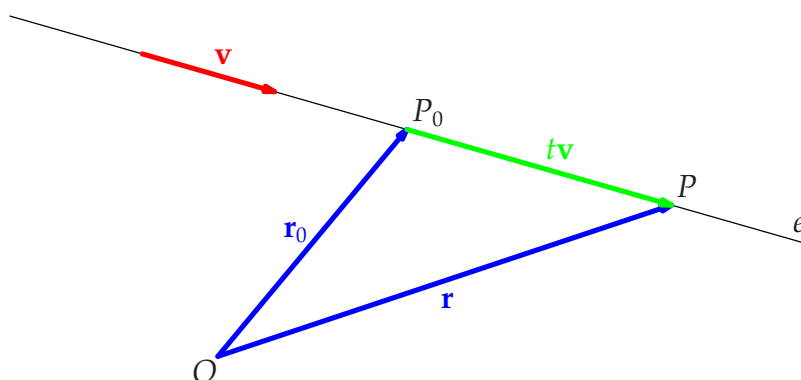
Megjegyzések:

- Minden egyenesnek végtelen sok irányvektora van.
- Párhuzamos egyenesek irányvektorai megegyeznek.

- Ha $\mathbf{r}_0$ az e egyenes egy P_0 pontjának helyvektora és $\mathbf{v}$ az e irányvektora, akkor az

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletet az e egyenes **paraméteres vektoregyenletének** nevezzük.



Megjegyzések:

- Ha t végigfut a valós számok halmazán akkor minden értékéhez olyan $\mathbf{r}$ vektor tartozik, amely az e egyenes egy pontjának helyvektora.
- A t paraméter különböző értékeihez különböző $\mathbf{r}$ vektorok tartoznak.
- Az e egyenes bármely pontjának helyvektora előáll t alkalmas megválasztásával.

Példa: Ha $P_0(2, 3, 1)$ az e egyenes egy pontja és $\mathbf{v}(5, -2, 7)$ az egyenes egyik irányvektora, akkor e paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = (2 + 5t)\mathbf{i} + (3 - 2t)\mathbf{j} + (1 + 7t)\mathbf{k}$$

- Ha $P_0(x_0, y_0, z_0)$ az e egyenes egy P_0 pontja és $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ az e irányvektora, akkor az

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszert az e egyenes **paraméteres egyenletrendszerének** nevezzük.

Megjegyzés: A paraméteres egyenletrendszer ugyanazt az összefüggést fejezi ki, mint a paraméteres vektoregyenlet.

Példa: Ha a $P_0(2, 1, 4)$ pont rajta van az e egyenesen és a $\mathbf{v}(3, -1, -2)$ vektor párhuzamos e -vel, akkor e paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Ha $P_0(x_0, y_0, z_0)$ az e egyenes egy P_0 pontja és $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ az e irányvektora, ahol v_1, v_2, v_3 egyike sem 0, akkor az

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

egyenletrendszert az e egyenes (paramétermentes) **egyenletrendszerének** nevezzük.

Példa: Ha a $P_0(2, 1, 4)$ pont rajta van az e egyenesen és a $\mathbf{v}(3, -1, -2)$ vektor párhuzamos e -vel, akkor e egyenletrendszere:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 4}{-2}$$

Megjegyzések:

- Ha a z egyenes paraméteres egyenletrendszeréből kiküszöböljük a t paramétert, akkor megkapjuk a paramétermentes egyenletrendszert.
- Ha az irányvektor valamelyik koordinátája 0, akkor az egyenes egyenletrendszere más formájú, de akkor is megkapható a paraméteres egyenletrendszerből t kiküszöbölésével.

Példa: Ha a $P_0(2, 1, 4)$ pont rajta van az e egyenesen és a $\mathbf{v}(3, 0, -2)$ vektor párhuzamos e -vel, akkor e egyenletrendszere:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{z-4}{-2} \\ y = 1 \end{cases}$$

- Az S síkra merőleges **0-tól különböző** vektort az s sík **normálvektorának** nevezzük.

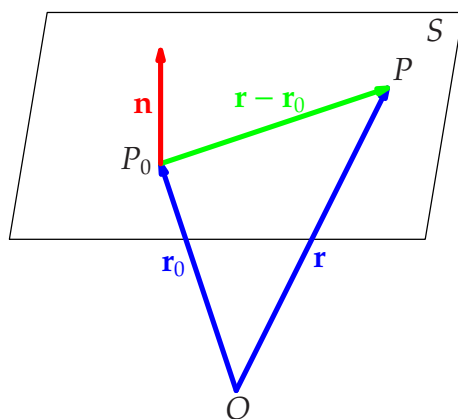
Megjegyzések:

- Egy síknak végtelen sok normálvektora van.
- Párhuzamos síkok normálvektorai megegyeznek.

- Ha $\mathbf{r}_0$ az S sík egy P_0 pontjának helyvektora és $\mathbf{n}$ az S normálvektora, akkor az

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

egyenletet az S sík **vektoregyenletének** nevezzük.



Megjegyzés: Az egyenletet azért nevezzük a sík vektoregyenletének, mert a sík minden pontjának helyvektora kielégíti, míg más pontok egyike sem.

- Ha $P_0(x_0, y_0, z_0)$ az S sík egy pontja és $\mathbf{n}(A, B, C)$ az S normálvektora, akkor az

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

egyenletet az S sík **egyenletének** nevezzük.

Megjegyzés: Ez az egyenlet ekvivalens a sík vektoregyenletével.

Példa: Ha $P_0(4, -1, -2)$ az S sík egy pontja, $\mathbf{n}(2, 3, 5)$ S egy normálvektora, akkor

$$2(x - 4) + 3(y + 1) + 5(z + 2) = 0$$

a sík egyenlete.

1.5.2. Feladatok

1. Írja fel az egyenes vektoregyenletét, paraméteres egyenletrendszerét és paramétermentes egyenletrendszerét, ha adott egy pontja és egy irányvektora:

a) $P(2, 0, 7), \quad \mathbf{v}(-1, 2, 2)$

b) $P(-3, -4, 9), \quad \mathbf{v}(3, -2, 0)$

c) $P(0, 0, 0), \quad \mathbf{v}(2, -6, 1)$

2. Írja fel az egyenes vektoregyenletét, paraméteres egyenletrendszerét és paramétermentes egyenletrendszerét, ha adott két pontja:

a) $P_1(3, 6, -2), \quad P_2(-1, 0, 4)$

b) $P_1(-7, 3, 5), \quad P_2(-2, 0, 6)$

c) $P_1(9, 11, -4), \quad P_2(8, -5, 3)$

3. Párhuzamosak-e, illetve merőlegesek-e a következő egyenesek:

a) $e: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -8 + 8t \\ z = -1 - 10t \end{cases} \quad f: \begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = -4t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$

b) $e: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad f: \begin{cases} x = 110 - 3t \\ y = 7 - 4t \\ z = 32 + 10t \end{cases}$

4. Írja fel a $P(2, 5, -3)$ pontra illeszkedő, az $x = 2 - t, y = -6 + 2t, z = 3 - 3t$ egyenesre merőleges sík egyenletét!
5. Adott az ABC háromszög: $A(7, -4, 2), B(2, 2, 1), C(5, -2, 4)$. Írja fel a síkjának az egyenletét és az AB oldal felezőmerőlegesének paraméteres egyenletrendszerét!

1.5.3. Megoldások

1. a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{k} - t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},$

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 7 + 2t \end{cases}, \quad 2 - x = \frac{y}{2} = \frac{z - 7}{2}$$

b) $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 3t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j},$

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -4 - 2t \\ z = 9 \end{cases}, \quad \frac{x + 3}{3} = -\frac{y + 4}{2}, \quad z = 9$$

c) $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + t\mathbf{k},$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \\ z = t \end{cases}, \quad \frac{x}{2} = -\frac{y}{6} = z$$

2. a) $\mathbf{v}(2, 3, -3), \quad \mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k} + 2t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k},$

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + 3t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 6}{3} = -\frac{z + 2}{3}$$

b) $\mathbf{v}(5, -3, 1), \quad \mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} + 5t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + t\mathbf{k},$

$$\begin{cases} x = -7 + 5t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases}, \quad \frac{x + 7}{5} = -\frac{y - 3}{3} = z - 5$$

c) $\mathbf{v}(1, 16, -7), \quad \mathbf{r} = 9\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + t\mathbf{i} + 16t\mathbf{j} - 7t\mathbf{k},$

$$\begin{cases} x = 9 + t \\ y = 11 + 16t \\ z = -4 - 7t \end{cases}, \quad x - 9 = \frac{y - 11}{16} = -\frac{z + 4}{7}$$

3. a) $e \parallel f$ mert $\mathbf{v}_e(6, 8, -10)$ és $\mathbf{v}_f(-3, -4, 5)$, tehát az irányvektorok párhuzamosak, mert $\mathbf{v}_e = -2\mathbf{v}_f$.

b) $e \perp f$ mert $\mathbf{v}_e \mathbf{v}_f = 0$, azaz $\mathbf{v}_e \perp \mathbf{v}_f$.

4. A sík normálvektora megegyezik a megadott egyenes irányvektorával, azaz $\mathbf{n}(-1, 2, -3)$, a sík egyenlete $-x + 2y - 3z = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) = 17$.

5. A háromszög síkjának egy normálvektora pl. $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, a sík egyenlete: $7x + 6y + z = 27$.

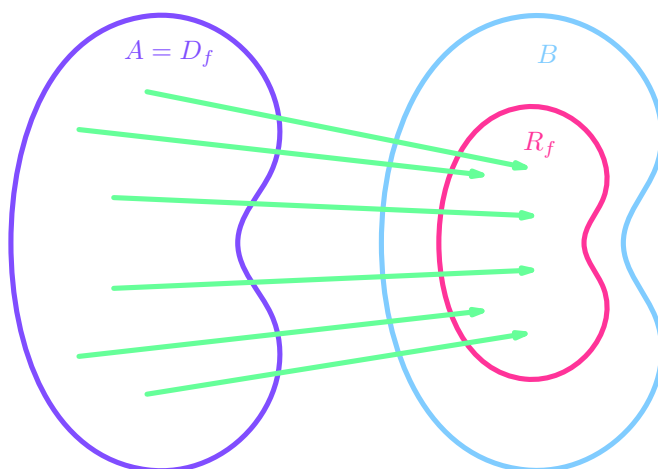
Az AB szakasz felezőpontja $F\left(\frac{9}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$, felezőmerőlegesének irányvektora merőleges

az $\overrightarrow{AB}$ vektorra és a sík normálvektorára is, így pl. $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}(6, -1, -36)$. Az AB szakasz felezőmerőlegesének paraméteres egyenletrendszere:
$$\begin{cases} x = \frac{9}{2} + 6t \\ y = -1 - t \\ z = \frac{3}{2} - 36t \end{cases}$$

2. Függvények

2.1. Elméleti összefoglaló

- Ha az f függvény az A halmaz minden eleméhez hozzárendeli a B halmaz pontosan egy elemét, de az A halmazon kívüli elemekhez nem rendel semmit, akkor A -t az f függvény **értelmezési tartományának** nevezzük, és D_f -fel jelöljük. A B halmaz azon elemeinek halmazát, amelyek előállnak képként (amelyeket az f függvény hozzárendel D_f legalább egy eleméhez) az f függvény **értékkészletének** nevezzük és R_f -fel jelöljük.

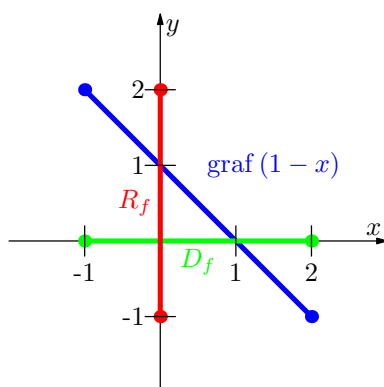


Megjegyzések:

- A függvényt gyakran az értelmezési tartományával együtt adjuk meg. Ha az értelmezési tartományt nem adtuk meg akkor a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát tekintjük értelmezési tartománynak, amelynek elemeihez a megadott hozzárendelési szabály segítségével értéket tudunk rendelni.
- A B halmaz tehát nem feltétlenül egyezik meg az értékkészlettel – bár az is előfordulhat – mert lehetnek B -nek olyan elemei, amelyek nem állnak elő képként. Mindenképpen igaz viszont az $R_f \subseteq B$ összefüggés.

Példák:

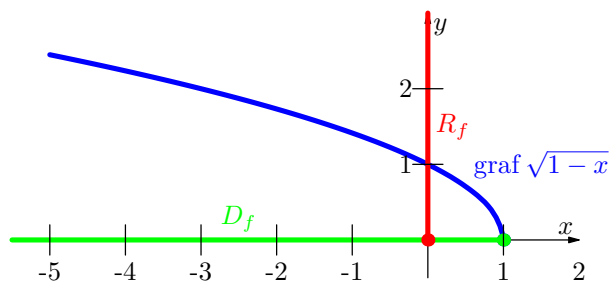
Az $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 2]$ intervallum, mert ez szerepel a függvény megadásában. (Bár a hozzárendelési szabály alkamas lenne arra, hogy ezen intervallumon kívüli elemet, pl. 5-öt behelyettesítsünk.) Ugyanezt a függvényt megadhatjuk a következőképpen is: $f: D_f = [-1, 2]$, $f(x) = 1 - x$.



A függvény grafikonjáról leolvasható, hogy f értékkészlete ugyancsak a $[-1, 2]$ intervallum.

A $g(x) = \sqrt{1 - x}$ függvény értelmezési tartománya a $]-\infty, 1]$ halmaz (amelybe az $x \leq 1$ számok tartoznak), mert negatív számból nem tudunk gyököt vonni (pontosabban majd tudni fogunk, de az eredmény nem valós szám lesz). Figyeljük meg, hogy ez a lehető legbővebb halmaz amit választhattunk, mert minden olyan x szám benne van, amelyre $1 - x \geq 0$.

A g függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, azaz $R_g = [0, \infty[$.



Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **zérushelyén** olyan $x \in D_f$ számot értünk, amelyre $f(x) = 0$.

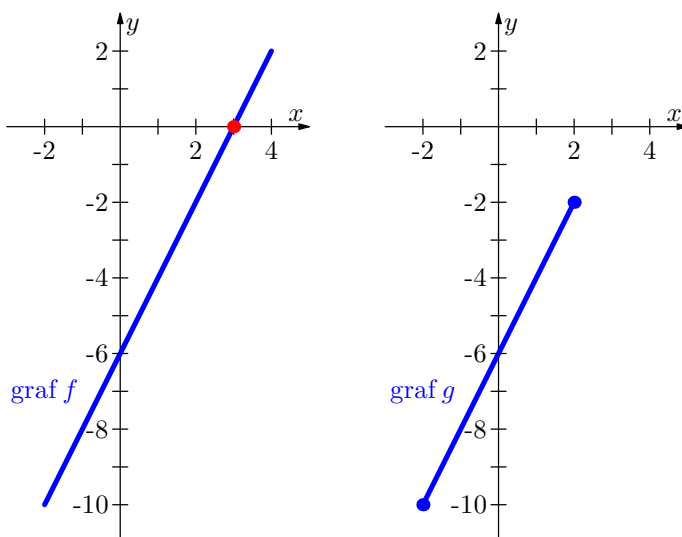
Megjegyzések:

- Egy függvénynek lehet több – esetleg végtelen sok – zérushelye is, de az az is előfordulhat, hogy nincs zérushelye.
- A zérushelye(ke)t a függvénygrafikonon a függvénygörbe x -tengellyel való metszéspon-tja(i) szemléltetik.

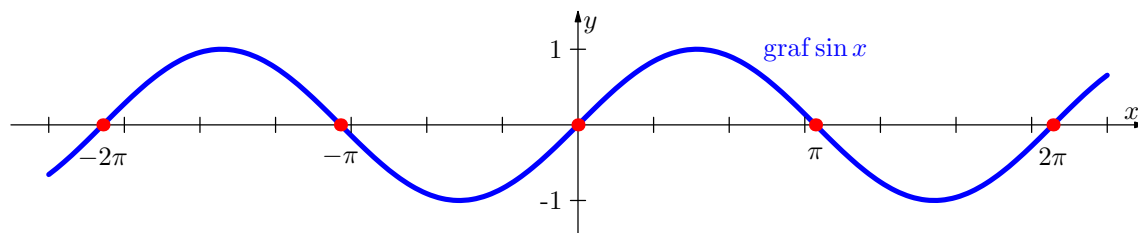
Példák:

Az $f(x) = 2x - 6$ függvénynek egyetlen zérushelye az $x = 3$, mert $f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$ és f helyettesítési értéke minden más helyen 0-tól különböző. Figyeljük meg, hogy a zérushely az $f(x) = 0$, azaz $2x - 6 = 0$ egyenlet megoldása.

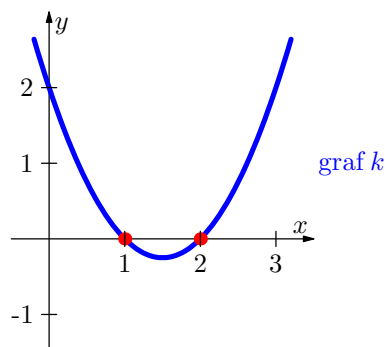
A $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 6$ függvénynek nincs zérushelye, mert a 3 azaz a $g(x) = 0$ egyenlet megoldása nem esik g értelmezési tartományába.



A $h(x) = \sin x$ függvénynek végtelen sok zérushelye van, mégpedig az $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ számok. (Tehát $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$).



A $k(x) = x^2 - 3x + 2$ függvénynek két zérushelye van: az $x = 1$ és az $x = 2$. (Ezek az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet megoldásai.)



Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **páros**, ha $\forall x \in D_f$ esetén $(-x) \in D_f$ is teljesül és $f(-x) = f(x)$.

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **páratlan**, ha $\forall x \in D_f$ esetén $(-x) \in D_f$ is teljesül és $f(-x) = -f(x)$.

Megjegyzések:

- A $\forall x \in D_f$ jelölés azt jelenti, hogy az állítás minden olyan x számra teljesül, amely benne van az f függvény értelmezési tartományában.
- A páros függvények grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y -tengelyre, a páratlan függvények grafikonja pedig középpontosan szimmetrikus az origóra.

Példák: Az $f(x) = x^2$ függvény páros, mert a valós számok halmazán értelmezett és $\forall x \in D_f$ esetén $(-x)^2 = x^2$.

A $g: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ függvény nem páros, mert $2 \in D_g$, de $-2 \notin D_g$. Ugyanezért g nem lehet páratlan sem.

Az $x \mapsto x^n$ függvény páros ha n páros egész szám, és páratlan, ha n páratlan egész szám.

A $h(x) = e^x$ függvény nem páros és nem is páratlan, mert pl. $h(1) = e \approx 2,72$ és $h(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$. Tehát a $h(1)$ nem egyezik meg a $h(-1)$ -gyel, de nem is ellentettjei egymásnak.

A $k: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin x$ függvény páratlan, mert $\forall x \in D_f$ esetén $(-x) \in D_f$ is teljesül és $\sin(-x) = -\sin x$.

Az $x \mapsto \cos x$ függvény páros, az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ és $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvények viszont páratlanok.

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **periodikus**, ha $\exists p \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\forall x \in D_f$ esetén $(x \pm p) \in D_f$ is teljesül és $f(x \pm p) = f(x)$. A p számot az f függvény **periódusának** nevezzük.

Megjegyzések:

- A $\exists p \in \mathbb{R}^+$ jelölés azt jelenti, hogy létezik (van olyan) p pozitív szám amelyre az állítás teljesül.
- Ha egy p szám periódusa egy f függvénynek, akkor $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén np is periódusa f -nek.

Példák:

Az $f(x) = \sin x$ függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2π . További periódusai $4\pi, 6\pi, \dots$

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa π .

Az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény nem periodikus. Ez szemmel látható pl. a grafikonjáról, de igazolhatjuk úgy is, hogy pontosan két zérushelye van ($x = 1$ és $x = 3$), tehát nem található olyan p pozitív szám amelyre $f(3) = f(3 + p)$ teljesülne.

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **felülről korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) \leq K$.
A K számot az f függvény egy **felső korlátjának** nevezzük.

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **alulról korlátos**, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) \geq k$.
A k számot az f függvény egy **alsó korlátjának** nevezzük.

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **korlátos**, ha alulról is és felülről is korlátos.

Megjegyzések:

- Ha az f függvénynek egy $K \in \mathbb{R}$ szám felső korlátja, akkor minden K -nál nagyobb valós szám is felső korlátja.
Hasonlóan, ha $k \in \mathbb{R}$ alsó korlátja a g függvénynek, akkor g -nek minden k -nál kisebb valós szám is alsó korlátja.
- Ha az f függvénynek van felső korlátja, akkor van legkisebb felső korlátja is, azaz van a felső korlátai között egy legkisebb.
Hasonlóan, ha a g függvény alulról korlátos, akkor van legnagyobb alsó korlátja.

Példák:

- Az $f(x) = 2x - 6$ függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.
- A $k(x) = x^2 - 3x + 2$ függvény alulról korlátos, de felülről nem korlátos (így nem korlátos).
Alsó korlátja pl. a $-1, -2$, stb. A legnagyobb alsó korlátja $-\frac{1}{4} = -0,25$.

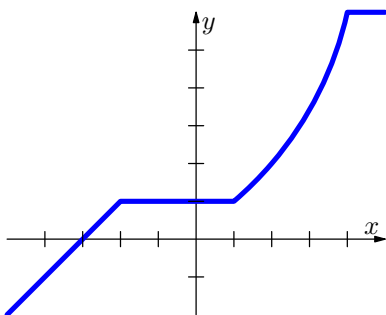
- Az $f(x) = \sin x$ függvény korlátos. Legnagyobb alsó korlátja a -1 , legkisebb felső korlátja 1 .

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **monoton növekedő**, ha $\forall x_1, x_2$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Megjegyzések:

- $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) azt jelenti, hogy az f függvény értelmezési tartománya is és értékkészlete is a valós számok valamilyen részhalmaza. (Nem feltétlenül valódi részhalmaza, bármelyik lehet egyenlő is a valós számok halmazával.)
- A függvény tehát monoton növekedő, ha az értelmezési tartomány két különböző elemét véve, azok közül a nagyobbikhoz legalább akkora függvényérték tartozik, mint a kisebbikhez.



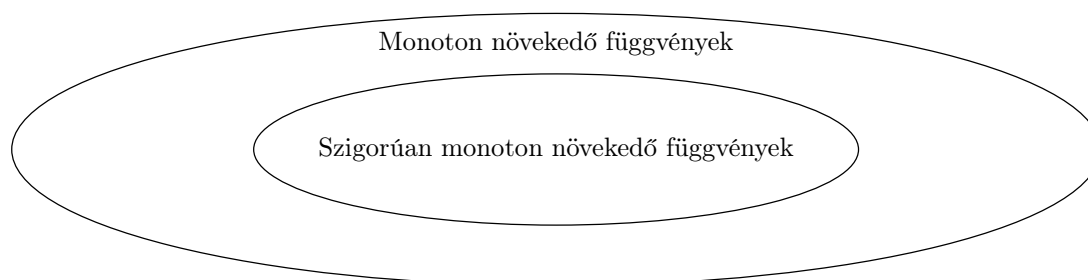
Monoton növekedő függvény grafikonja

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **szigorúan monoton növekedő**, ha $\forall x_1, x_2$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Megjegyzések:

- Tehát a szigorúan monoton növekedő függvény értelmezési tartományának két különböző eleméhez nem tartozhat ugyanaz a függvényérték.
- A szigorúan monoton növekedő függvény mindig monoton növekedő is, azonban a monoton növekedő függvény nem biztos, hogy szigorúan monoton növekedő is. Másképpen fogalmazva a szigorúan monoton növekedő függvények a monoton növekedő függvények valódi részhalmazát képezik.



Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **monoton csökkenő**, ha $\forall x_1, x_2$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

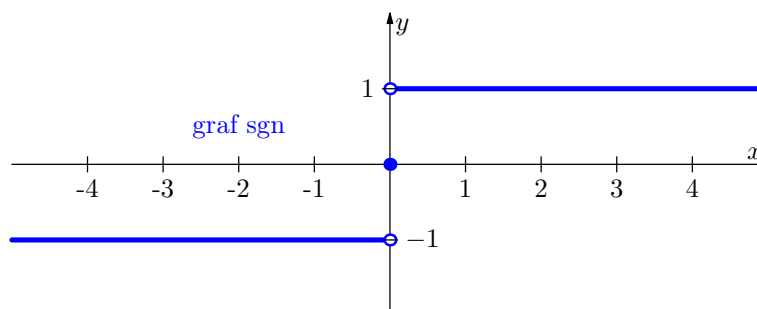
Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **szigorúan monoton csökkenő**, ha $\forall x_1, x_2$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Megjegyzés: A monoton csökkenő függvények halmazának valódi részhalmaza a szigorúan monoton csökkenő függvények halmaza. Példák:

- Az $f(x) = 2x - 1$ függvény szigorúan monoton növekedő (így monoton növekedő is).
- Az előjelfüggvényt (szignum függvény) a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Az előjelfüggvény monoton növekedő, de nem szigorúan monoton növekedő.

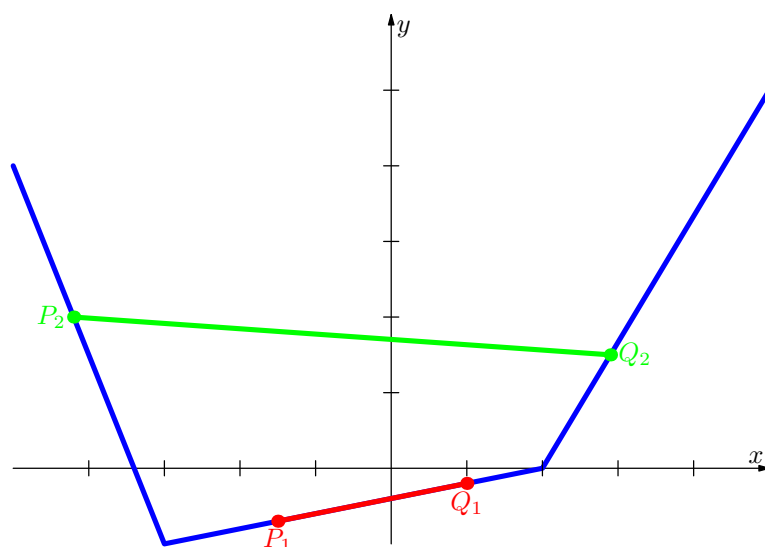
- Az $f(x) = x^2$ függvény nem monoton, mert $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1)$ és $f(x_2)$ bármilyen relációban lehet egymással:
 $1 < 2$ és $1^2 < 2^2$
 $-3 < -2$ és $(-3)^2 > (-2)^2$
 $-2 < 2$ és $(-2)^2 = 2^2$

- A $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ függvény szigorúan monoton növekedő. (Két nem-negatív szám közül a nagyobbiknak a négyzete is nagyobb.)
- Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény nem monoton:
 $2 < 3$ és $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
 $-5 < -4$ és $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$
 $-1 < 2$ és $-1 < \frac{1}{2}$
 (Az első két sor alapján még gondolhatnánk, hogy a függvény (szigorúan) monoton csökkenő, de a harmadik sor ezt kizárja.)
- A $g:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő (tehát monoton csökkenő is), mert két pozitív szám közül a nagyobbik reciproka a kisebb.

Definíció

Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény és $I \subseteq D_f$, ahol I egy intervallum. Az f függvény **konvex** az I intervallumon, ha $\forall a, x, b$ esetén $a < x < b \Rightarrow f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$.

Megjegyzés: A konvexitás szemléletes jelentése, hogy kiválasztva az I intervallum két tetszőleges pontját ($a, b \in I$), az függvénygrafikon ezekhez tartozó pontjait ($P(a, f(a))$ és $Q(b, f(b))$) összekötve egy olyan húst kapunk, ami egyetlen helyen sincs a „függvénygrafikon alatt”.

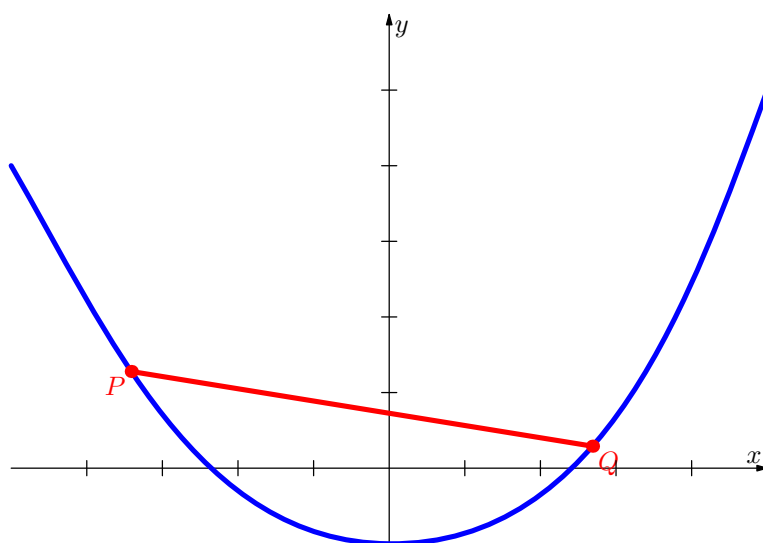


Definíció

Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény és $I \subseteq D_f$, ahol I egy intervallum. Az f függvény **szigorúan konvex** az I intervallumon, ha

$$\forall a, x, b \text{ esetén } a < x < b \Rightarrow f(x) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

Megjegyzés: Itt az előző megjegyzésben szereplő húr pontjai – a végpontokat kivéve – a „függvénygrafikon felett” vannak.

**Definíció**

Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény és $I \subseteq D_f$, ahol I egy intervallum. Az f függvény **konkáv** az I intervallumon, ha

$$\forall a, x, b \text{ esetén } a < x < b \Rightarrow f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

Definíció

Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény és $I \subseteq D_f$, ahol I egy intervallum. Az f függvény **szigorúan konkáv** az I intervallumon, ha

$$\forall a, x, b \text{ esetén } a < x < b \Rightarrow f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

Példák:

- Az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan konvex (tehát konvex is).
- A $g(x) = -x^2$ függvény szigorúan konkáv (tehát konkáv is).
- A $h(x) = |x|$ függvény konvex, de nem szigorúan konvex.
- A $k(x) = \sin x$ függvény se nem konvex, se nem konkáv. Van azonban olyan intervallum ahol konvex, illetve konkáv: pl. a $[0, \pi]$ intervallumon szigorúan konkáv, a $[\pi, 2\pi]$ intervallumon szigorúan konvex.
- Az $l(x) = 2x - 3$ függvény egyszerre konvex is konkáv is (de nem szigorúan).

Definíció

Az x_0 valós számot az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **(abszolút) maximum helyének** nevezzük, ha $x_0 \in D_f$ és $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Ebben az esetben az x_0 helyen felvett $f(x_0)$ függvényértéket az f függvény **(abszolút) maximum értékének** nevezzük.

Megjegyzések:

- Nem minden függvénynek van maximum helye (és maximum értéke).
- Egy függvénynek több maximum helye is lehet, de legfeljebb 1 (abszolút) maximum értéke.

Definíció

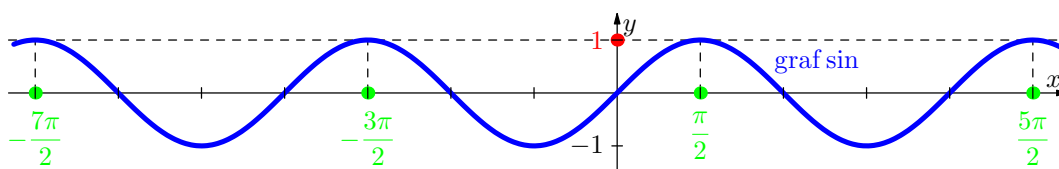
Az x_0 valós számot az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **(abszolút) minimum helyének** nevezzük, ha $x_0 \in D_f$ és $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Ebben az esetben az x_0 helyen felvett $f(x_0)$ függvényértéket az f függvény **(abszolút) minimum értékének** nevezzük.

Megjegyzés: A maximum- és minimum helyet közös néven **szélsőérték** helynek, a maximum- és minimum értékeket pedig **szélsőérték**nek nevezzük.

Példák:

- Az $f(x) = -x + 5$ függvénynek nincs szélsőértéke. (Tehát szélsőértékhelye sincs.)
- A $g(x) = x^2$ függvénynek az $x_0 = 0$ hely minimumhelye, és az itt felvett $g(x_0) = g(0) = 0$ a minimum értéke.
Maximuma nincs.
- A $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvénynek az $x_0 = 0$ hely a maximumhelye, maximum értéke pedig $h(x_0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1$.
Minimuma nincs.
- A $k(x) = \sin x$ függvénynek végtelen sok maximumhelye van. Ezeken a helyeken 1-et vesz fel, tehát maximum értéke 1.
A maximumhelyeket $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) alakban tudjuk megadni. A k paraméter tetszőleges egész szám lehet, ezeket a képletbe helyettesítve egyenként kaphatjuk meg a maximumhelyeket.
Pl. ha $k = 0$ -t helyettesítünk, akkor a $\frac{\pi}{2}$ maximumhelyet kapjuk.
Ha $k = 1$ -et, akkor a következő maximumhely adódik: $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.
A $-\frac{3\pi}{2}$ maximumhely a $k = -1$ helyettesítéssel kapható: $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$.



A $k(x) = \sin x$ függvénynek végtelen sok minimumhelye van. Ezeket a $-\frac{\pi}{2} + 2l\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$) képlettel lehet megadni.
A minimumérték -1 .

Megjegyzés: Ha egy valós-valós függvénynek van abszolút maximuma, akkor felülről korlátos és az abszolút maximum értéke egyben a legkisebb felső korlátja is.

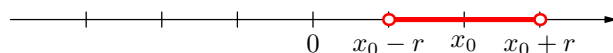
Hasonlóan ha egy valós-valós függvénynek van abszolút minimuma, akkor alulról korlátos és az abszolút minimum értéke egyben a legnagyobb alsó korlátja is.

Nem szabad azonban a korlátosság és a szélsőérték fogalmát összekeverni. Gyakran előfordul ugyanis, hogy egy függvény felülről, illetve alulról korlátos, mégisincs maximuma, illetve minimuma.

Példa erre a fenti $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvény, amely alulról korlátos (alsó korlátja pl. a 0), mégisincs minimuma.

Definíció

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az $]x_0 - r, x_0 + r[$ nyílt intervallumot az x_0 szám r sugarú **környezetének** nevezzük.



Megjegyzés: $\mathbb{R}^+$ -szal a pozitív valós számok halmazát jelöltük, tehát r pozitív valós számot jelöl.

Definíció

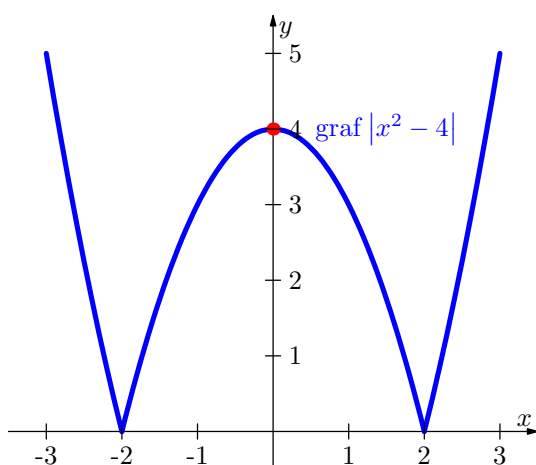
Az x_0 valós számot az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **lokális maximum helyének** nevezzük, ha

$\exists r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq D_f$ és

$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$

Ebben az esetben az x_0 helyen felvett $f(x_0)$ függvényértéket az f függvény **lokális maximum értékének** nevezzük.

Példa: Az $f(x) = |x^2 - 4|$ függvénynek $x = 0$ -ban lokális maximuma van, ami nem abszolút maximuma a függvénynek.



Definíció

Az x_0 valós számot az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **lokális minimum helyének** nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \exists r \in \mathbb{R}^+, \text{ amelyre }]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq D_f \text{ és} \\ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\text{ esetén } f(x) \geq f(x_0) \end{aligned}$$

Ebben az esetben az x_0 helyen felvett $f(x_0)$ függvényértéket az f függvény **lokális minimum értékének** nevezzük.

Definíció

Az x_0 valós számot az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **inflexiós helyének** nevezzük, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq D_f$ és f az $]x_0 - r, x_0]$ és $[x_0, x_0 + r[$ intervallumok közül az egyikben konvex, másikban konkáv.

Példa: Az $f(x) = \sin x$ függvény inflexiós helyei az $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ számok. (Tehát végtelen sok inflexiós helye van.)

2.1.1. A valós-valós függvények folytonossága

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos az x_0 helyen**, ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ szám amelyre teljesül, hogy $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D_f$ és

$$\text{ha } |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Megjegyzések:

- A definícióból következik, hogy ha a függvény folytonos x_0 -ban, akkor értelmezett is x_0 -ban, sőt értelmezett x_0 egy környezetében is.
- Akármilyen kis (ε) pozitív számot adunk meg, ha f folytonos x_0 -ban, akkor megadható x_0 -nak egy környezete, amelyben minden függvényérték ε -nál kevesebbel tér el $f(x_0)$ -tól.

Bizonyítható, hogy a fenti definíció ekvivalens a következővel:

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos az x_0 helyen**, ha értelmezett az x_0 egy környezetében és $\forall (x_n)$ sorozatra teljesül, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Példák:

- Az $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sin x$ függvények minden valós helyen folytonosak.
- Az $f:]-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény folytonos a $] -1, 2[$ intervallum minden pontjában.
Nem folytonos 2-ben, mert nincs 2-nek olyan környezete, amely része a függvény értelmezési tartományának.
Nem folytonos a függvény a -1 -nél kisebb, illetve a 2-nél nagyobb helyeken sem, hiszen ezekben nincs értelmezve.
- Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény nem folytonos 0-ban, hiszen itt nincs értelmezve.
Minden más valós helyen folytonos.
- Az előjelfüggvény nem folytonos 0-ban, bár itt értelmezett.
Ez bármelyik definíció alapján látható. Pl. az első definíció alapján, ha $\varepsilon = \frac{1}{2}$ -et választunk, akkor ehhez nem található $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre teljesülne, hogy a $] -\delta, \delta[$ intervallum

minden elemére $|\operatorname{sgn}(x) - 0| < \frac{1}{2}$. Ugyanis ha $x \neq 0$, akkor $|\operatorname{sgn}(x) - 0| = |\pm 1| = 1 \not< \frac{1}{2}$.

A másik definícióval még egyszerűbb: Tekintsük pl. az $x_n = \frac{1}{n}$ sorozatot. Nyilván $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = x_0$, de $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(x_0)$.

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **jobbról folytonos az x_0 helyen**, ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ szám amelyre teljesül, hogy $[x_0, x_0 + \delta[\subseteq D_f$ és

$$\text{ha } 0 \leq x - x_0 < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definíció

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **balról folytonos az x_0 helyen**, ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ szám amelyre teljesül, hogy $]x_0 - \delta, x_0] \subseteq D_f$ és

$$\text{ha } -\delta < x - x_0 \leq 0, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Megjegyzés: Az $[x_0, x_0 + \delta[$, illetve $]x_0 - \delta, x_0]$ intervallumokat szokás az x_0 jobboldali-, illetve baloldali (δ -sugarú) környezetének nevezni.

Példa: Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény a 0-ban nem folytonos, de jobbról folytonos ugyanitt.

Tétel:

Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0 helyen, ha jobbról is és balról is folytonos x_0 -ban.

2.1.2. Műveletek a valós-valós függvények körében

Ha két függvény értelmezési tartománya tartalmaz közös elemet (értelmezési tartományaik metszete nem az üres halmaz), akkor értelmezhetjük a két függvény összegét, különbségét és szorzatát.

Definíció

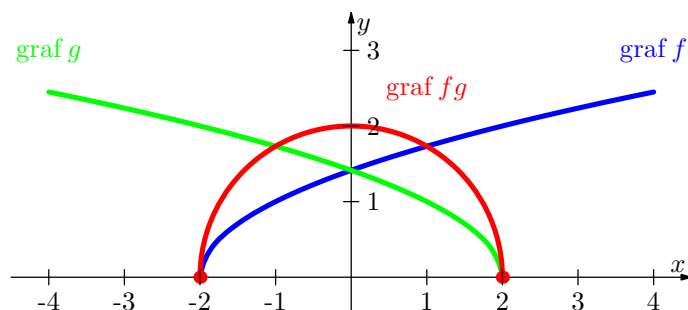
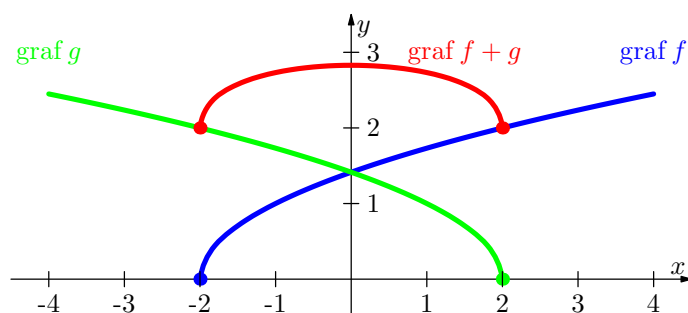
Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $D_g \subseteq \mathbb{R}$, továbbá $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Ekkor

$$f + g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f - g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$fg: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Példa: Az $f(x) = \sqrt{x+2}$ függvény értelmezési tartománya $[-2, \infty[$, a $g(x) = \sqrt{2-x}$ függvény értelmezési tartománya pedig $]-\infty, 2]$. Összegük, különbségük, szorzatuk értelmezési tartománya $D_f \cap D_g = [-2, 2]$.



A függvények hányadosánál még arra is figyelemmel kell lenni, hogy 0-val nem oszthatunk:

Definíció

Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $D_g \subseteq \mathbb{R}$, g zérushelyeinek halmazát jelöljük N -nel. ($N = \{x \mid g(x) = 0\}$). Ha $(D_f \cap D_g) \setminus N \neq \emptyset$, akkor

$$\frac{f}{g}: (D_f \cap D_g) \setminus N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Példa: Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a konstans 1 és az $x \mapsto x$ függvények hányadosa. Ezek mindegyike értelmezett a valós számok halmazán. f mégsem értelmezett a 0-ban, hiszen itt az $x \mapsto x$ függvény 0-t vesz fel.

Definíció

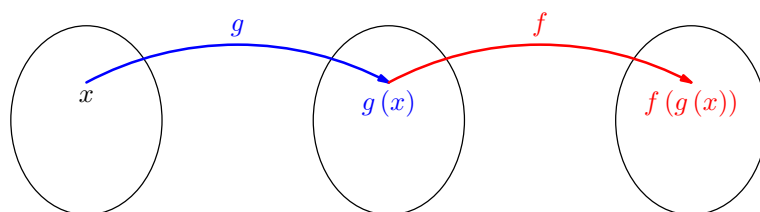
Legyen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $D_g \subseteq \mathbb{R}$, továbbá $R_g \cap D_f \neq \emptyset$. Ekkor az f és g függvények $f \circ g$ -vel jelölt **összetett függvényét** a következőképpen értelmezzük:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \text{ és}$$

$$\forall x \in D_{f \circ g} \text{ esetén } (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Az f függvényt **külső**, a g függvényt **belső függvénynek** nevezzük.

Megjegyzés: Tehát amit a belső függvény értéként felvesz, arra alkalmazzuk a külső függvényt.



Példák:

- Ha a belső függvény a $g(x) = x - 2$, a külső függvény az $f(x) = |x|$, akkor $(f \circ g)(x) = |x - 2|$.
- Ha a belső függvény a $g(x) = |x|$, a külső függvény az $f(x) = x - 2$, akkor $(f \circ g)(x) = |x| - 2$.

Megjegyzés: A fenti példákból látható, hogy az összetett függvény képzése nem kommutatív művelet, azaz (általában) $f \circ g \neq g \circ f$.

Tétel:

Ha az f és g valós-valós függvények folytonosak az x_0 helyen, akkor $f + g$, $f - g$ és fg is folytonos x_0 -ban.

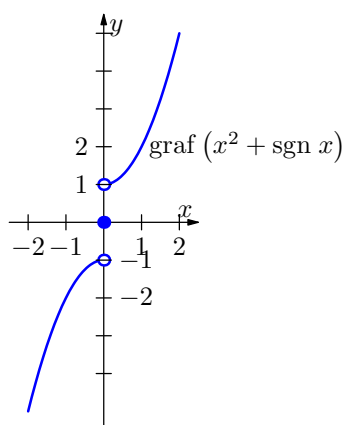
Példák:

- Mivel az $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sin x$ függvények minden valós helyen értelmezettek és folytonosak, ezért az

$$(f + g)(x) = x^2 + \sin x, (f - g)(x) = x^2 - \sin x, (g - f)(x) = \sin x - x^2, (fg)(x) = x^2 \sin x$$

függvények is minden valós helyen értelmezettek és folytonosak.

- Az $x \mapsto x^2 + \operatorname{sgn} x$ függvény az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos, mert $\forall x \neq 0$ esetén az $f(x) = x^2$ és $g(x) = \operatorname{sgn} x$ függvények is folytonosak.



Megjegyzés: Ha a két függvény nem folytonos x_0 -ban, attól még előfordulhat, hogy összegük, különbségük vagy szorzatuk folytonos x_0 -ban.

Tétel:

Ha az f és g valós-valós függvények folytonosak az x_0 helyen és $g(x_0) \neq 0$ akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0 -ban.

Példa: Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény minden $x \neq 0$ helyen folytonos, hiszen a konstans 1 függvény és az $x \mapsto x$ függvény minden valós helyen folytonosak.

Tétel:

Ha f és g valós-valós függvények, g folytonos az x_0 helyen és f folytonos a $g(x_0)$ helyen, akkor $f \circ g$ is folytonos x_0 -ban.

Példa: Az $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ függvény az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos, mert $x \mapsto \frac{1}{x}$ folytonos minden $x \neq 0$ helyen, a $\sin x$ függvény pedig minden valós helyen folytonos (Tehát $\frac{1}{x}$ -ben is).

2.1.3. Függvények határértéke

Definíció

Az $x_0 \in \mathbb{R}$ hely r sugarú **pontozott környezetén** az $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ halmazt értjük.

Megjegyzés: Tehát a pontozott környezetet úgy kaptuk, hogy az x_0 r sugarú környezetéből elhagytuk az x_0 -t.

Definíció

Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az x_0 hely egy pontozott környezetében. Az A számot az f függvény x_0 -beli határértékének nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ valós számhoz, $\exists \delta > 0$ valós szám, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Megjegyzés: Amint az a definícióból látható az f függvény x_0 -beli határértéke nem függ az x_0 -ban felvett helyettesítési értéktől, sőt f -nek akkor is lehet határértéke x_0 -ban, ha nincs is ebben a pontban értelmezve.

A fenti definíció ekvivalens a következővel:

Definíció

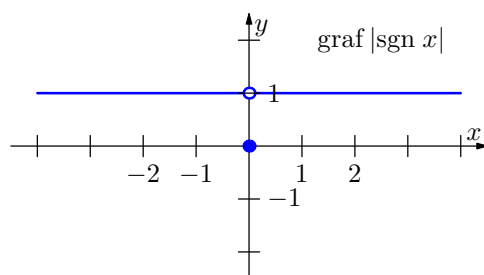
Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az x_0 hely egy pontozott környezetében. Az A számot az f függvény x_0 -beli határértékének nevezzük, ha minden olyan x_n sorozatra, amelyre $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, az $f(x_n)$ sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Tétel:

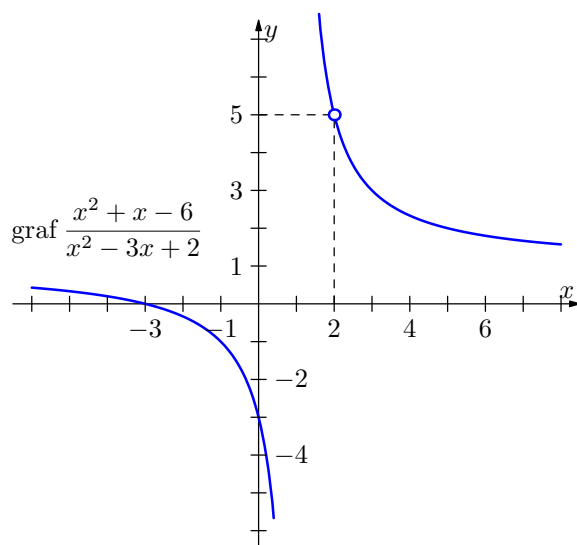
Ha f folytonos x_0 -ban, akkor létezik x_0 -ban határértéke is és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Példák:

- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$, mert $x \mapsto x^2$ folytonos $x = 3$ -ban (minden valós helyen folytonos), ezért $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, mert minden olyan sorozatra, amelyre $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = 0$, de $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $x_n \neq 0$ teljesül, hogy $f(x_n) = |\operatorname{sgn} x_n|$ a konstans 1 sorozat, melynek határértéke 1.



- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 3x + 2} = 5$. Az $x \mapsto \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ függvény az $x = 2$ -ben nincs értelmezve (a nevező 0), ha pedig $x \neq 2$, akkor $\frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x + 3}{x - 1}$.



Az $x = 2$ hely „elég kis” pontozott környezetében a felvett függvényértékek kevesebbel térnek el 5-től, mint ε .

2.2. Feladatok

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 6x + 11}{x^2 + 9x + 20}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x - 6}{x^2 + 1} - \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6} : \frac{x^3 - 8}{2x - 1}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{\frac{8 - 2x}{x + 3}}$$

$$\text{e) } f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12}}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2x - 15}} + \sqrt[6]{\frac{x + 7}{x^2 - 9}}$$

$$\text{g) } f(x) = \log_3 \frac{5 - x}{x + 3}$$

$$\text{h) } f(x) = \log_3 (5 + x) + \log_3 (x + 3)$$

$$\text{i) } f(x) = \log_{x-9} \frac{3x - 2}{x + 6}$$

2. Hol van zérushelye a következő függvényeknek?

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{\frac{x + 4}{2x - 1}}$$

$$\text{c) } f(x) = e^x \cdot \sin x$$

3. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket paritás szempontjából:

$$\text{a) } f(x) = \frac{|x|}{x^3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{|x - 1|}{x^3}$$

$$\text{c) } f(x) = \ln |x|$$

$$\text{d) } f(x) = (x^2 - 9)(x - 1)(x + 1)$$

4. Periodikusak-e a következő függvények? Ha igen, akkor határozza meg a legkisebb pozitív periodusukat.

a) $f(x) = \cos 2x$

b) $f(x) = x \sin x$

c) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$

d) $f(x) = |\sin x|$

5. Határozza meg az $f(x) = \frac{2x^2 + 11x - 6}{x^2 + 4x - 12}$ függvény határértékét az $x = 3$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -6$, $x = 2$ helyeken, továbbá $\pm\infty$ -ben, ha lehetséges.

6. Határozza meg a

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{100x^2 + 1000x + 10000},$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{100x^2 + 1000x + 10000},$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^5 - 1}$

határértékeket.

7. Hol nem folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x^2-2x-3} & \text{ha } x \neq 3 \text{ és } x \neq -1 \\ \frac{1}{4} & \text{ha } x = 3 \\ 4 & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

függvény?

3. Differenciálszámítás

(Átmeneti állapotban)

3.1. Teljes függvényvizsgálat

A teljes függvényvizsgálat lépései:

1. Értelmezési tartomány meghatározása
Tengelymetszetek meghatározása. (Az y -tengelyt legfeljebb egy helyen metszheti a grafikon – ez az $f(0)$ érték – az x -tengelyt már több helyen is metszheti, ezek a tengelymetszetek a zérushelyek.)
2. Szimmetriatulajdonságok meghatározása
Páros-e, páratlan-e, periodikus-e a függvény.
3. Folytonosság és határértékek.
Legtöbbször olyan függvények fordulnak elő, amelyek majdnem mindenütt folytonosak, tehát azt kell megnézni, hogy hol van a függvénynek szakadási helye. Természetesen előfordulhat az is, hogy nincs szakadási hely.
A bal- és jobboldali határértékeket meg kell nézni a szakadási helyeken, továbbá meg kell nézni a határértéket az „értelmezési tartomány szélein”. (Az utóbbi általában a $-\infty$ -ben és a $+\infty$ -ben vett határértéket jelenti, de pl. az $f(x) = \ln x$ függvény esetén nem lehet szó a $-\infty$ -ben vett határértékről, hiszen a függvény csak a pozitív számok halmazán értelmes. Ebben az esetben a 0-ban vett jobboldali határértéket kell meghatározni.)
4. Első derivált, monotonitás és szélsőértékek.
5. Második derivált, konvexitás - konkávitás, inflexiós helyek.
6. Ebben a pontban a függvény grafikonját kell felrajzolni, a már megállapított tulajdonságok alapján.
7. Értékkészlet meghatározása

Megjegyzés: A fenti sorrendtől indokolt esetben el lehet térni, de ritkán találkozunk olyan függvénnyel, amikor ez valóban szükséges.

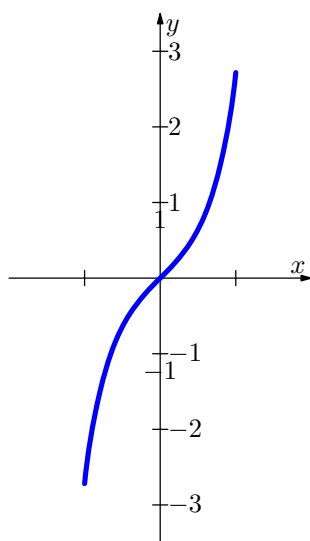
Példák:

Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = xe^{x^2}$ függvényen!

Megoldás:

1. $D_f = \mathbb{R}$, zérushelye $x = 0$.
2. Páratlan, $(f(1) = 2e, f(-1) = -\frac{2}{e})$ nem periódikus (Pl. a zérushelyből látszik.)
3. Folytonos.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
4. $f'(x) = e^{x^2} (1 + 2x^2) > 0$
A függvény szigorúan monoton nő.
5. $f''(x) = e^{x^2} (4x^3 + 6x)$

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	infl. 0	$\cup$



6.

7. $R_f = \mathbb{R}$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = ex - e^x$ függvényen!

Megoldás:

1. $D_f = \mathbb{R}$, zérushelye $x = 1$, $f(0) = -1$.

2. Nem páros, nem páratlan, nem periódikus (Pl. a zérushelyből látszik.)

3. Folytonos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \left(e - \frac{e^x}{x} \right) \right) = -\infty, \text{ mert } \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty}_{L'H},$$

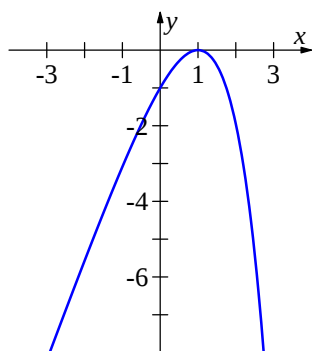
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ex - e^x) = -\infty$$

4. $f'(x) = e - e^x$

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\uparrow$	max. 0	$\downarrow$

5. $f''(x) = -e^x$

Mivel f'' mindenütt negatív f szigorúan konkáv



6.

7. $R_f =]-\infty; 0]$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ függvényen!

Megoldás:

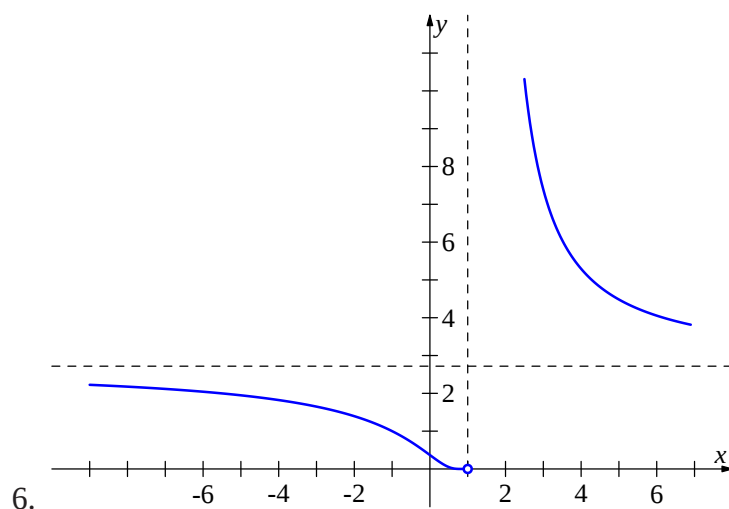
1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, zérushelye nincs, $f(0) = \frac{1}{e}$.
2. Nem páros, nem páratlan, nem periódikus (értelmezési tartomány).
3. f értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

$$4. f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

x	$x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$	–	–
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

$$5. f''(x) = \frac{4x}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f''(x)$	–	0	+	×	+
$f(x)$	$\cap$	infl. $\frac{1}{e} \approx 0,368$	$\cup$	×	$\cup$



$$7. R_f =]0, \infty[\setminus \{e\}$$

3.2. Feladatok

1. Képezze határátmenettel a következő függvények differenciálhányadosát az $x_0 \in \mathbb{R}$ helyen:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2 + 3x$

c) $f(x) = \frac{5}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

2. Képezze az

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{ha } x < 4 \\ 2x-7 & \text{ha } x \geq 4 \end{cases}$$

függvény differenciálhányadosát az $x_0 = 4$ helyen.

3. Képezze a

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } -2 < x \\ x-2 & \text{ha } x \leq -2 \end{cases}$$

függvény differenciálhányadosát az $x_0 = -2$ helyen.

4. Határozza meg a következő függvények x szerinti első deriváltját:

a) $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 11x - 3}{4x}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x\sqrt{x} + 5x + 6\sqrt{x} - 11}{2x}$

c) $f(x) = x^2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x$

d) $f(x) = x \cdot \operatorname{ch} x + x^3 \cdot \operatorname{sh} x$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{\ln x}$

f) $f(x) = \frac{2}{x+5} - \frac{\sin x}{x^2}$

g) $f(x) = e^{\sin x}$

h) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{1-x}\right)$

i) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

5. Írja fel az $f(x) = x^2 - 8x + 3$ függvény $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjához húzható érintőjének az egyenletét!

6. Írja fel az $f(x) = \cos 2x$ függvény $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ abszcisszájú pontjához húzható érintőjének az egyenletét!

7. Számítsa ki L'Hospital-szabállyal a következő határértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\log_2 x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$

8. Végezzen teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeken:

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 8}$

3.3. Megoldások

8. a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$

I. $D_f = \mathbb{R}$, zérushely: $x = 0$

II. Páratlan, mert $f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 9} = -\frac{2x}{x^2 + 9} = -f(x)$.

Nem periodikus, mert pontosan egy zérushelye van.

III. Minden $x \in \mathbb{R}$ helyen folytonos, mert folytonos függvényekből alapműveletek segítségével képezzük és a nevező sehol nem zérus.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, mert a nevező magasabb fokú, mint a számláló.

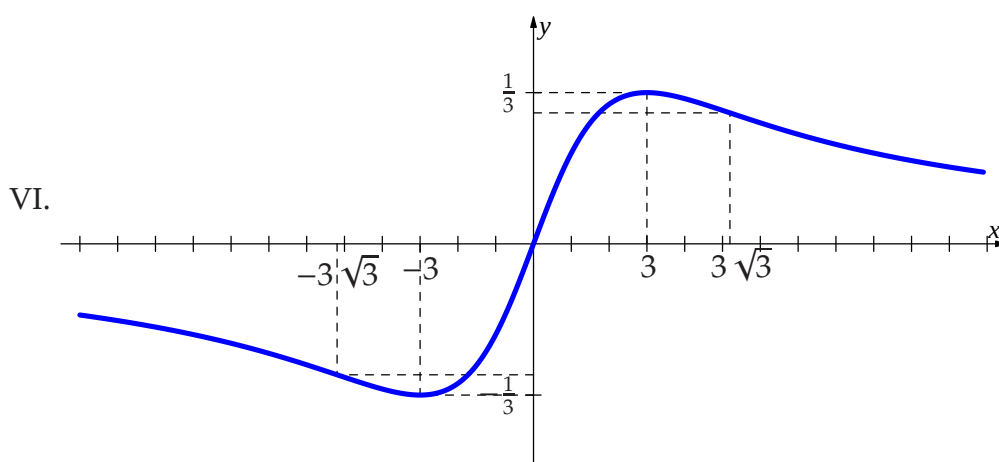
IV. $f'(x) = \frac{2(x^2 + 9) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{18 - 2x^2}{(x^2 + 9)^2}$ A derivált zérushelyei: $x = \pm 3$

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	min. $-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	max. $\frac{1}{3}$	$\searrow$

V. $f''(x) = \frac{-4x \cdot (x^2 + 9)^2 - (18 - 2x^2) \cdot 2(x^2 + 9) \cdot 2x}{(x^2 + 9)^4} = \frac{4x(x^2 - 27)}{(x^2 + 9)^3}$

A második derivált zérushelyei: $x = 0$ és $x = \pm 3\sqrt{3}$

	$x < -3\sqrt{3}$	$x = -3\sqrt{3}$	$-3\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3\sqrt{3}$	$x = 3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3} < x$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	infl. $-\frac{\sqrt{3}}{6} \approx -0,29$	$\cup$	infl. 0	$\cap$	infl. $\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,29$	$\cup$



VII. $\mathbb{R}_f = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 8}$

4. Integrálszámítás

4.1. Határozatlan integrálok

Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

1. a) $\int (3x^2 - 5x + 2) dx$ b) $\int \frac{(x\sqrt[3]{x} - 1)^2}{x\sqrt{x}} dx$
 c) $\int (x^2 + 3 \cos x - \sin x) dx$ d) $\int \left(e^x + 5 \cos x - \frac{1}{2^x}\right) dx$
 e) $\int \left(\frac{\operatorname{ch} x}{2} + 4 \operatorname{sh} x\right) dx$ f) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
 g) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin 2x} dx$ h) $\int \frac{3x^2 - 1}{1 + x^2} dx$
 i) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$
2. a) $\int (4x + 2)^6 dx$ b) $\int \sqrt{5x - 1} dx$
 c) $\int \frac{3x}{x + 5} dx$ d) $\int \left(3^{2x-1} - \frac{1}{2^{4x+11}}\right) dx$
 e) $\int (\sin 5x - 2 \cos 3x) dx$ f) $\int \frac{2}{1 + 9x^2} dx$
 g) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\right) dx$ h) $\int \cos^2 2x dx$
 i) $\int \operatorname{sh}^2 (6x - 2) dx$
3. a) $\int \frac{3x}{(2 - x^2)^6} dx$ b) $\int \frac{2x + 5}{(x^2 + 5x + 3)^{11}} dx$
 c) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 - 7}} dx$ d) $\int (3 \cos^3 x \sin x - 2 \cos^2 x \sin x) dx$
 e) $\int \sin^3 x dx$ f) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1 + x^2} dx$
 g) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$ h) $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x \sqrt{\operatorname{sh} x}} dx$
 i) $\int 2^x (2^x - 1)^5 dx$
4. a) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} dx$ b) $\int \operatorname{ctg} x dx$
 c) $\int \operatorname{tg} 3x dx$ d) $\int \operatorname{th}(2x + 1) dx$
 e) $\int \frac{e^x}{3e^x + 2} dx$ f) $\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 2} dx$

5. a) $\int x \cdot e^{x^2} dx$ b) $\int (2x - 1) \sin(x^2 - x) dx$ c) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$

d) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int e^x \operatorname{ch}(e^x - 6) dx$

6. Alkalmazza a parciális integrálás módszerét.

a) $\int x \cdot \sin x dx$ b) $\int x \cdot \cos x dx$ c) $\int x^2 \cdot \sin x dx$

d) $\int x \cdot \sin 2x dx$ e) $\int (2x + 1) \cdot \cos x dx$ f) $\int x \cdot e^x dx$

g) $\int x \ln x dx$ h) $\int \arcsin x dx$ i) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

7. Alkalmazza a racionális törtök integrálására tanult módszereket.

a) $\int \frac{x^3}{x+1} dx$ b) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$ c) $\int \frac{x-2}{x^2+4x+5} dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$ e) $\int \frac{2x+5}{x^2+2x-15} dx$ f) $\int \frac{3x+5}{x(x+2)^2} dx$

8. Végezze el a következő integrálásokat helyettesítéssel:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt[3]{x}} dx$ b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx$ c) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+3} dx$

d) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{e^x-2} dx$ e) $\int \frac{dx}{\sin x}$ f) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

4.2. Határozott integrálok

1. Számítsa ki a következő határozott integrálok értékét:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int_1^2 (2x^2 + 5x) dx & \text{b)} \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} & \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx & \text{d)} \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx \\
 \text{e)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} & \text{f)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 \cos^2 x} & \text{g)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx & \text{h)} \int_{-1}^2 \frac{3}{e^{2x}} dx \\
 \text{i)} \int_{\pi}^{2\pi} \cos^5 x dx & \text{j)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 \sin^6 x} dx & \text{k)} \int_2^4 \frac{\ln 3x}{x} dx & \text{l)} \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx \\
 \text{m)} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^6 x} dx & \text{n)} \int_0^3 \operatorname{ch}^5 x dx & &
 \end{array}$$

2. Alkalmazza a parciális integrálás módszerét határozott integrálokra:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int_2^3 x \cdot e^{3x} dx & \text{b)} \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx & \text{c)} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx \\
 \text{d)} \int_1^2 \arctg(2x-1) dx & \text{e)} \int_1^e (x+1) \ln^2 x dx &
 \end{array}$$

3. Alkalmazzon helyettesítéssel integrálást a következő integrálok kiszámítására:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int_0^1 \frac{2-\sqrt{x}}{4+x\sqrt{x}} dx & \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - 1}{\cos x + 3} dx & \text{c)} \int_0^{\ln 5} \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 2} dx
 \end{array}$$

4. Számolja ki a megadott függvény és az x -tengely közötti területet a megadott intervallumban:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} f(x) = 2x^3 - x, [2, 4] & \text{b)} f(x) = \ln x, [1, e] & \text{c)} f(x) = \arcsin x, \\
 & & \left[0, \frac{1}{2}\right]
 \end{array}$$

5. Határozza meg az $f(x) = 4x^2 - 10x + 12$ és a $g(x) = x^2 + 8x - 12$ függvények grafikonjai által határolt korlátos síkidom területét.